Exercice 1 *(ENSEA 25)* Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $f_n(x) = \frac{n^2x^2}{1+n^3x^3}$.
Étudier la convergence simple, puis la convergence uniforme, de (f_n) et de (f_n').

Exercice 2 *(CCINP 25)* Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx}$ si $x \geq 0$, $\frac{nx^3}{1+nx^2}$ si $x < 0$.

a) Montrer que (f_n) converge uniformément sur $\mathbf{R}$ vers une fonction que l'on précisera.

b) Montrer que f_n est dérivable sur $\mathbf{R}$ puis étudier la convergence de (f_n').

Exercice 3 *(Navale 25)*

Étudier la convergence sur $]0,1]$ de la suite de fonctions définie par : $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} - \int_1^n \frac{x^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 4 *(Mines-Ponts 25)* Soit $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$ pour $n \in \mathbf{N}$.

a) Étudier la convergence simple et uniforme de la suite de terme général $f_n(x)$ sur $[0,+\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$ et calculer cette intégrale.

c) Déterminer la limite de $\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ quand n tend vers l'infini. Commentaire ?

Exercice 5 *(CCINP 25)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x > 0$ on pose $f_n(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}(nx)}$.

a) Donner le domaine de définition de $S(x) = \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$.

b) Déterminer le domaine de continuité de S, puis les variations de S.

c) Démontrer qu'il existe $A > 0$ tel que : $\forall n \geqslant 2,\ \forall x \geqslant A,\ f_n(x) \leqslant 3\mathrm{e}^{-nx}$.

d) En déduire que $S(x) \sim \frac{1}{\mathrm{sh}(x)}$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 6 *(CCINP 25)* Pour $x \in \mathbf{R}$ et $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n(x) = \frac{\ln(1+x^2n^2)}{n^2\ln(1+n)}$.

a) Montrer que la série de terme général $u_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathbf{R}$.

b) Montrer que la somme de la série est continue sur $\mathbf{R}$.

c) La série des dérivées converge-t-elle normalement sur $\mathbf{R}$?

d) Montrer que la série des dérivées converge uniformément sur $\mathbf{R}$.
(on pourra pour cela effectuer une comparaison série intégrale)

Exercice 7 *(Centrale 25)*

1) Montrer qu'il existe une unique fonction f_n de classe $\mathscr{C}^2$ de $\mathbf{R}_+^*$ dans $\mathbf{R}$ vérifiant :
$f_n(1) = f_n(2) = 0$ et $f_n''(x) = (-1)^n 2^{-nx^2}$.

2) Établir la convergence uniforme des séries de fonction $\sum f_n''$, $\sum f_n'$ et $\sum f_n$ sur tout segment de $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice 8 *(Mines-Télécom 23)* Pour $x > 0$ on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+xn}$.

a) Montrer que l'on définit ainsi une application continue sur $\mathbf{R}_+^*$.

b) Déterminer la limite de $f(x)$ en $+\infty$. c) Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbf{R}_+^*$.

Exercice 9 *(Mines-Télécom 25)* Pour tout $x > 0$ on pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(n+x)}$.

a) Montrer que f est bien définie sur $]0,+\infty[$.

b) Déterminer $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ tels que : $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 10 *(CCINP 22)* Soit $f : t \mapsto \mathrm{e}^t \ln(t)$.
Justifier l'intégrabilité de f sur $]0,1]$ puis montrer que $\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,n!}$.