Pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x > 0$ on pose $u_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n!\,(n+x)}$ et $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.

1) Montrer que $S(x)$ est bien définie pour tout $x > 0$, et préciser son signe. Que vaut $S(1)$?

2) En justifiant la méthode employée, donner une valeur approchée de $S(1/2)$.

3) Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$, puis préciser le signe de $S'(x)$.

4) Déterminer les limites de $S(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.

5) Donner l'allure de la courbe représentative de S.

6) Vérifier que pour tout $x > 0$ et tout $n \geqslant 1$, $x\,u_n(x) = u_{n-1}(x+1) + \frac{(-1)^n}{n!}$.
En déduire une relation entre $S(x)$ et $S(x+1)$.

7) Retrouver alors les résultats de la question 4) puis déterminer des équivalents de $S(x)$ quand x tend vers 0 et quand x tend vers $+\infty$.

8) Montrer que $S(x) = \dfrac{1}{\mathbf{e}\,x} + \dfrac{1}{\mathbf{e}\,x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.
Trouver un développement asymptotique avec un terme supplémentaire.

9) Pour $x > 0$ et $t > 0$ on pose $f_x(t) = \mathbf{e}^{-t}\,t^{x-1}$.

a) Justifier l'existence de $I(x) = \displaystyle\int_0^1 f_x(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $x > 0$.

b) On pose $g_x(t) = f_x(t) - t^{x-1}$ pour $t > 0$; et $g_x(0) = 0$.
Montrer que g_x est la somme d'une série de fonctions uniformément convergente sur $[0,1]$.

c) Déduire de ce qui précède une relation entre $I(x)$ et $S(x)$.