Charles Levelle

Cours

Suite proposition 4. (Par récurrence)

$(\mathcal{P}_k)$ Si (f_n) est une suite de fonction de classe C^k sur I telle que :
(i) Pour $0 \leq i \leq k-1$, $f_n^{(i)}(x)$ CVS vers $h_i(x)$, $\forall x \in I$
(ii) $(f_n^{(k)})$ CVU sur tout segment de I (vers h_k)

Alors i) h_0 est de classe C^k sur I, avec $h_0^{(i)}(x) = h_i(x)$
ii) pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$ la convergence de $f_n^{(i)}(x)$ vers $h_i(x)$ est uniforme sur tout segment de I.

$(\mathcal{P}_1)$ i) a été établi lundi
Reste à établir $(\mathcal{P}_1)$ ii) en partant de

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f_n'(t)\,dt$$

On avait obtenu $f(x) = f(a) + \int_a^x h(t)\,dt$.

Du coup, $|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(a) - f(a)| + \left|\int_a^x f_n'(t) - h(t)\,dt\right|$

pour $x \in [a,b]$

$$\left|\int_a^x f_n'(t) - h(t)\,dt\right| \leq \int_a^x |f_n'(t) - h(t)|\,dt$$

$$\leq (b-a)\,\|f_n' - h\|_\infty^{[a,b]}$$

Du coup, on obtient :

$$\|f_n - f\|_\infty^{[a,b]} \leq |f_n(a) - f(a)| + (b-a)\,\|f_n' - h\|_\infty^{[a,b]}$$

Maintenant si l'on impose $(\mathcal{P}_k)$ établi, passons à $(\mathcal{P}_{k+1})$: on considère (f_n) suite de fonctions de classe C^{k+1} sur I telle que :

i) Pour $0 \leq i \leq k$, $f_n^{(i)}(x)$ CVS vers $h_i(x)$, $\forall x \in I$

ii) Pour tout segment $[a,b] \subset I$, $f_n^{(k+1)}$ CVU sur $[a,b]$ vers $h_{k+1}(x)$.

• Posons $g_n(x) = f_n'(x)$.

Alors $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $(\mathcal{P}_k)$

Donc, par hypothèse de récurrence, h_1 est de classe C^k sur I, avec $h_1^{(i)} = h_{i+1}$ et la convergence de $g_n^{(i)}(x)$ vers $h_{i+1}(x)$ est uniforme sur tout segment de I.

(i.e. la convergence de $f_n^{(i+1)}(x)$ vers $h_{i+1}(x)$ est uniforme sur tout segment de I).

Du coup, (f_n) vérifie $(\mathcal{P}_1)$ donc h_0 est C^1 sur I et $h_0'(x) = \lim\limits_{n \to \infty} f_n'(x) = h_1(x)$

Finalement, h_0 est C^{k+1} sur I, avec $h_0^{(i)} = h_i$ pour $0 \leq i \leq k+1$

Remarque 6

⚠ $u_n(x) = \ln\left(x + \frac{1}{n}\right)$ pour $x \in]0,1]$.

$u_n(x)$ CVS vers $\ln(x)$ pour $x \in]0,1]$.

$b_n = \lim\limits_{x \to 0^+} u_n(x) = -\ln(n)$

Comme (b_n) n'est pas une suite convergente la convergence n'est pas uniforme sur $]0,1]$

- Si l'on étudie directement l'éventuelle convergence uniforme

⚠ la limite simple n'est pas nulle, il s'agit d'étudier $\|h_n\|_\infty^{]0,1]}$ avec $h_n(x) = \ln\left(x+\frac{1}{n}\right) - \ln(x)$

Or, $\|h_n\|_\infty = +\infty$