notes
vendredi
20 nov.

Exemple 8 (suite du cours)

$U_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{CVU} 0$

On a une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers 0.

Mais $U_n'(x) = \sqrt{n} \cos(nx)$

Si $U_n'(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ alors $\boxed{\cos(nx) \longrightarrow 0}$

donc $\boxed{\sin^2(nx) \longrightarrow 1}$ (car $\sin^2(nx) = 1 - \cos^2(nx)$)

Cependant $\cos((n+1)x) = \cos(nx)\cos(x) - \sin(nx)\sin(x)$.

Doit aussi tendre vers 0

D'où $|\sin(nx)\sin(x)| \xrightarrow[\infty]{} 0$

Donc $\sin(x) = 0$ càd $\boxed{x = k\pi}$, $k \in \mathbb{Z}$ Contradiction!!!

Exemple 9

$U_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} \xrightarrow{CVS} |x|$

il faut faire attention ici, la limite simple n'est pas nulle.

$U_n(x) - |x| = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|}$

(on a multiplié par la quantité conjuguée)

Donc $\boxed{0 \leq U_n(x) - |x| = \frac{1}{n(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}}$

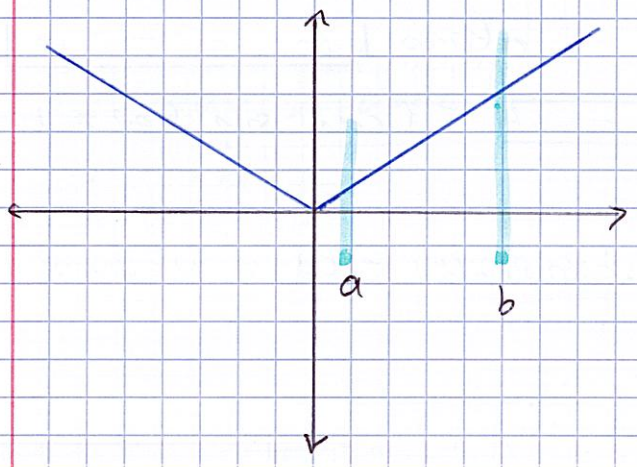
Il y a CVU sur $\mathbb{R}$.

C'est encore une suite de fonction de classe $C^1$

avec :

$$u_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} \xrightarrow{CVS} \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Ce n'est pas étonnant ! ☺




- on fixe a et b.
→ on va chercher à établir la CVU de la suite des dérivées sur leur segment. ★

☺ En 0 la suite des dérivées à une limite mais la limite n'est pas dérivable en 0.

★ $\|u_n'\|_{\infty}^{[a,b]} \leq \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{n}}}$ pour $0 < a < b$

$$u_n' - 1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}$$

$$\overset{\star}{=} \frac{-\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}\left(x + \sqrt{x^2 + 1/n}\right)}$$

★ on a multiplié par la quantité conjuguée

$$\| U_n(x) - 1 \|_\infty^{[a,b]} = \frac{1}{n\sqrt{a^2+\frac{1}{n}}\left(a+\sqrt{a^2+\frac{1}{n}}\right)} \leq \frac{1}{na^2}$$

Ainsi la suite des dérivées converge vers 1 uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ mais pas la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}_+^*$

Remarque 5

Si $U_n$ est une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle $I$ et si la stg $U_n(x)$ converge simplement sur $I$, pour récupérer la classe $\mathcal{C}^1$ sur $I$ de la somme :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)$$

Il suffit d'établir la convergence uniforme de la série des dérivées sur tout segment de $I$.

Exemple 10 $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ CVS sur $]-1;1[$.

⚠ Pour $x<0$ on a pas le CSSA !!!
→ on utilise alors la règle de d'alembert.

Soit : $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$

→ on ne peut pas utiliser la linéarité de la dérivée, c'est une somme rouge.!!!

On veut prouver que $S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n - 1}{x}$

→ Il suffit d'établir la CVU sur tout segment de $]-1;1[$. de la série des dérivées $U_n'(x) = (-1)^{n-1} x^{n-1}$

Fixons $r > 0$, alors $\boxed{\|u_n'\|_\infty^{[-r,r]} = r^{n-1}}$

$\forall r \geq 1$.

① où ② CVN sur $[-r,r]$ de la série des dérivées.

(Mais il n'y a pas CVN sur $[-1,1]$ !)

(ni même la CVU !!!)

(Sur tout segment, il y a convergence normale, donc uniforme $[-,]$)

→ La somme est donc de classe $C^1$ sur $]-1,1[$, avec

$$\boxed{S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{n-1} = \frac{1}{1+x}}$$

Ainsi $S$ est de classe $C^1$ sur $]-1,1[$ avec $S'(x) = \frac{1}{1+x}$. et $S(0) = 0$ Donc $S(x) = \ln(1+x)$.

$$\forall x \in ]-1,1[, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} = \ln(1+x)$$

→ C'est du cours !!!

De plus, $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ CVU sur $[0,1]$.

Car $\left| \sum_{n \geq n} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| \leq \frac{x^n}{n} < \frac{1}{n}$ $\forall x \in [0,1]$ par le CSSA

Ce que l'on veut retrouver ici c'est la continuité → c'est pour ça que l'on étudie la CVU de la série.

Par conséquent

$x \longmapsto \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ est continue sur $[0,1]$.

D'où $\lim_{x \to 1} S(x) = S(1)$

Ainsi par continuité du ln en 2

$$\ln(2) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

On retrouve une autre manière de répondre à l'une des questions du DS 2.