**Exercice 1** *(CCINP 26)* Soit $a>0$ et $f_a(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}(\sin t)^a(\cos t)^n$.

1) Quel est le domaine de définition de $f_a$ ? Donner une expression de $f_a(t)$ pour $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$.
2) La fonction $f_a$ est-elle intégrable sur $]0,\frac{\pi}{2}]$ ?
3) Que peut-on dire de la série de terme général $u_n=\int_0^{\pi/2}(\sin t)^a(\cos t)^n\,\mathrm{d}t$ ?

**Exercice 2** *(CCINP 26)* Soit $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{\mathrm{sh}\,t}\,\mathrm{d}t$.

1) Établir la convergence de $I$.
2) Montrer que l'on peut écrire : $\frac{\sin t}{\mathrm{sh}\,t}=2(\sin t)\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-2nt}$.
3) En déduire que $I=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(2n+1)^2+1}$.
4) Montrer que : $\frac{\pi}{4}\leqslant I\leqslant\frac{\pi}{4}+1$.

**Exercice 3** *(CCINP 26)* Pour $n\in\mathbf{N}$, soit $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan(n+x)}{(n+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.

a) Justifier l'existence de $I_n$ puis déterminer sa limite quand $n$ tend vers l'infini.

b) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{(n+x)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$. En déduire un équivalent de $I_n$.

**Exercice 4** *(CCINP 26)* Soit $I_n=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin nx}{1+n^4x^3}\,\mathrm{d}x$.

1) Justifier l'existence de $I_n$ pour tout $n\in\mathbf{N}$.
2) Pour $n\in\mathbf{N}^*$ montrer que : $I_n=n^{-\frac{5}{3}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{n^{\frac{1}{3}}\sin\left(t\,n^{-\frac{1}{3}}\right)}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$.
3) En déduire un équivalent de $I_n$ qaund $n$ tend vers l'infini.

**Exercice 5** *(CCINP 26)* Pour $n\in\mathbf{N}$, soit $I_n=\int_0^1\ln(1+t^n)\,\mathrm{d}t$.

1) Justifier la convergence de l'intégrale définissant $I_n$.
2) Montrer que la suite $(I_n)$ converge et déterminer sa limite.
3) Montrer que $I_n\sim\frac{1}{n}\int_0^1\frac{\ln(1+t)}{t}\,\mathrm{d}t$ quand $n$ tend vers l'infini.
4) Montrer que $I_n=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k(nk+1)}$.

**Exercice 6** *(Mines-Ponts 26)*

1) Montrer que $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ converge et que $I=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n\mathrm{d}t$.
2) En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n}\,I_{2n+1}\right)$ où $I_n=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n(t)\,\mathrm{d}t$.
3) Montrer que, pour tout $n\in\mathbf{N}^*$, $nI_nI_{n-1}=\dfrac{\pi}{2}$ ; en déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$

**Exercice 7** *(Mines-Ponts 26)*

1) Soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Montrer que $\displaystyle\int_0^1\frac{t^{a-1}}{1+t^c}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{a+nc}$
2) En déduire la valeur de la somme dans le cas $a=1$ et $c=3$.