Exercice 1 *(Mines-Télécom 25)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{n \sin\left(\frac{t}{n}\right)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.
Justifier la convergence de l'intégrale I_n puis étudier la convergence de la suite (I_n).

Exercice 2 *(Mines-Télécom 25)* Soit $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{(t-1)}$.
Justifier la convergence de I puis montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3 *(Navale 25)* Pour $n \in \mathbf{N}$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}\,\mathrm{d}x$.
Justifier la convergence de l'intégrale I_n puis étudier la convergence de la suite (I_n).

Exercice 4 *(CCINP 25)* Pour $n \in \mathbf{N}$, $a \in [0,1[$ et $x \in]0,1]$, soit $f_n(x) = \frac{1-\mathrm{e}^{-nx}}{x^a(1+x^2)}$ et $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

1) Montrer que f_n converge simplement vers une fonction f.
2) Pour quelles valeurs de a la convergence est-elle uniforme ?
3) Montrer que l'intégrale définissant I_n est convergente pour tout $n \in \mathbf{N}$.
4) Montrer que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.
5) Que se passe-t-il pour $a = 1$?

Exercice 5 *(CCINP 25)* Soit $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

a) Justifier la convergence de l'intégrale I.
b) Donner le développement en série entière de $\ln(1-t^2)$ pour $t \in [0,1[$.
c) Montrer que $I = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(2n-1)^2}$.
d) Déterminer a, b et c tels que : $\forall n \in \mathbf{N}^*$, $\frac{1}{n(2n-1)^2} = \frac{a}{n} + \frac{b}{2n-1} + \frac{c}{(2n-1)^2}$.
e) Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n-1}\right) = 2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-1}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
f) Sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, montrer enfin que : $I = \frac{\pi^2}{4} - 2\ln(2)$.

Exercice 6 *(CCINP 25)* Pour $n \in \mathbf{N}^*$ on pose $u_n(x) = (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}$.

1) Déterminer le domaine de définition D de $S : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.
2) S est-elle continue sur D ?
3) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbf{R}_+^*$.
4) Pour tout $x \in D$, calculer explicitement $S(x)$.
5) Montrer que S est intégrable sur $[0,+\infty[$.
6) Déterminer la valeur de $\int_0^{+\infty} S(x)\,\mathrm{d}x$, sachant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 7 *(Centrale 24)* Soit $f \in \mathscr{C}^{[0,1]}_{\mathbf{R}}$ et, pour $n \in \mathbf{N}$, $u_n = \int_0^1 f(x)\,x^n\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que si $f(1) > 0$ alors il existe $c > 0$ et $a \in]0,1[$ tels que : $\forall t \in [a,1]$, $f(t) \geqslant c$.
b) Montrer que si la série de terme général u_n converge alors $f(1) = 0$.
c) On suppose que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et que $f(1) = 0$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

Exercice 8 *(Centrale et Mines-Ponts 25)*

a) Pour $n \in \mathbf{N}^*$, soit $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Montrer que $H_n - \ln(n)$ tend vers une limite $\gamma \in \mathbf{R}$.
b) Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\ln(t)\,\mathrm{d}t$.
c) Pour tout entier $n \geqslant 2$ on pose $I_n = \int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^{n-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t$.
Justifier l'existence de I_n puis exprimer I_n en fonction de H_n. En déduire que $I = -\gamma$.