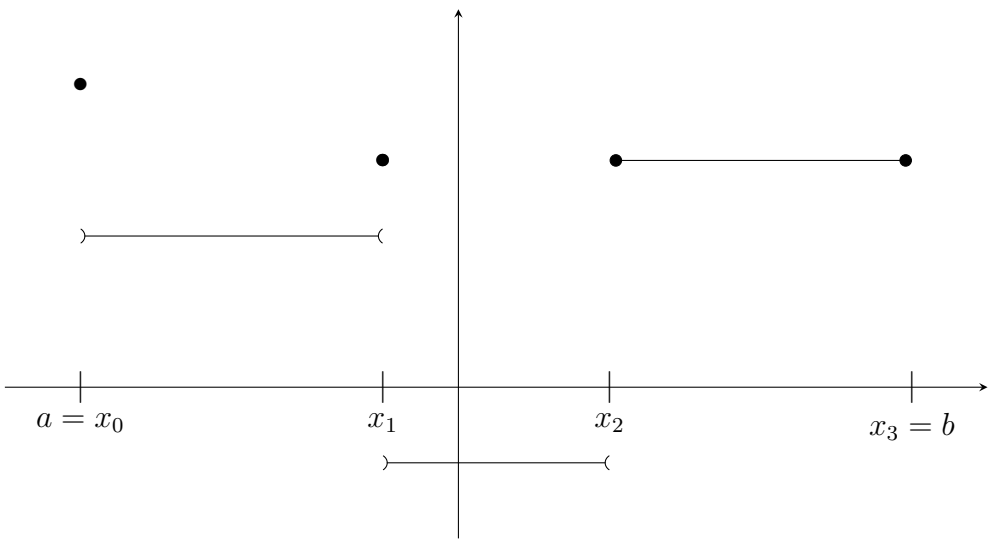
# Construction de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

## 0.1 Intégrale d'une fonction en escalier

**Définition 1**

1) *On appelle subdivision d'un segment $[a, b]$ toute famille finie $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ telle que $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.*
2) *Une fonction $f$ définie sur un segment $[a, b]$ est appelée fonction en escalier s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$ de $[a, b]$ telle que $f$ est constante sur* ***les ouverts*** *$]x_k, x_{k+1}[$ pour tout les $k \in [\![0; n-1]\!]$.*
3) *On note $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a; b]$.*




**Remarque** *Une fonction en escalier n'est pas nécessairement continue à droite ou à gauche en $x_k$.*

**Propriété** *L'ensemble $\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$.*

**Preuve**

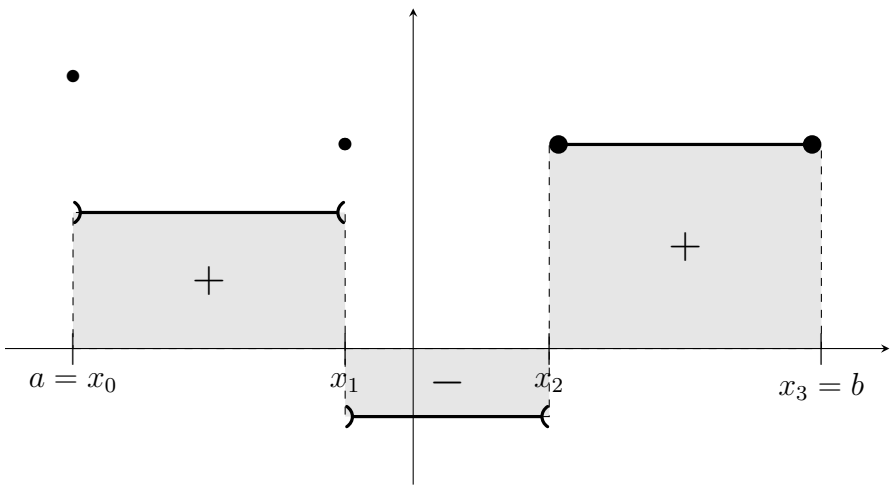
- *La fonction constante égale à zéro est constante, donc constante par morceaux.*
- *Soit $(f, g) \in (\mathcal{E}([a, b], \mathbb{R}))^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour montrer que $f + \lambda g$ est constante par morceaux, il faut construire une subdivision de $[a, b]$ adaptée à $f$ et à $g$.*

**Définition 2** *Soient $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, $f \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à $f$. Alors $\exists (y_0, \dots, y_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que*

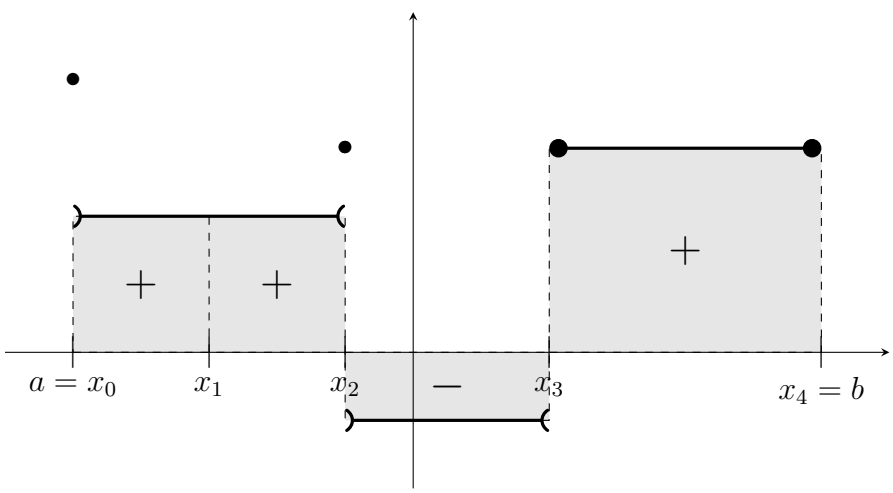
$$\forall k \in [\![0; n-1]\!], \quad \forall x \in ]x_k; x_{k+1}[, \quad f(x) = y_k.$$

*On appelle intégrale de $f$ sur $[a;b]$ le réel*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) y_k.$$

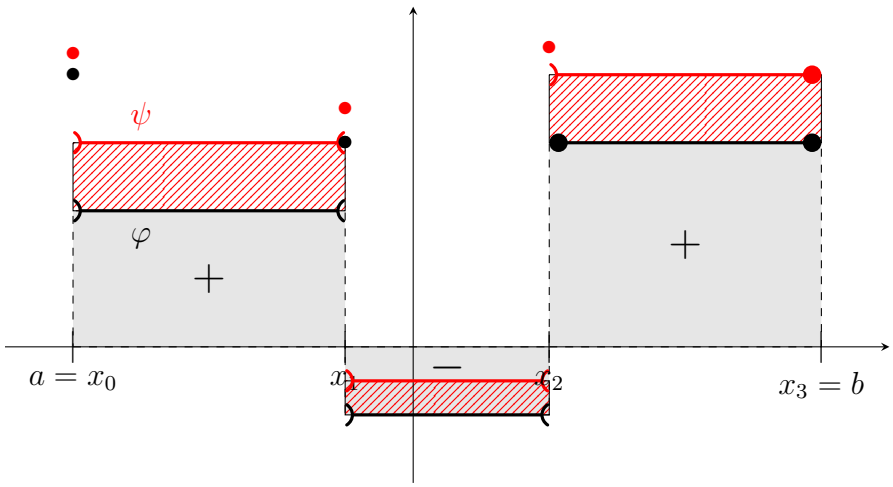



**Remarque** *L'intégrale d'une fonction en escalier est indépendante de la subdivision considérée.*



**Proposition (croissance de l'intégrale)**
*Soient $\varphi$ et $\psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telles que $\varphi \leq \psi$ sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi.$$




**Corollaire 1 (positivité de l'intégrale)**
*Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ telle que $\varphi \geq 0$ sur $[a,b]$ alors*

$$\int_a^b \varphi \geq 0.$$

**Proposition (linéarité de l'intégrale)**
*Soient $\varphi$ et $\psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors*

$$\int_a^b (\varphi + \lambda\psi) = \int_a^b \varphi + \lambda \int_a^b \psi.$$

**Proposition (Relation de Chasles)**
*Soient $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$ et $c \in ]a,b[$, alors*

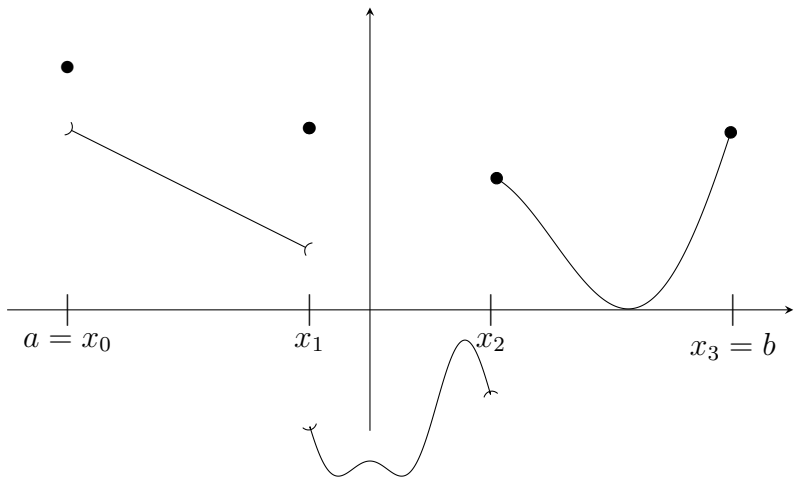
$$\int_a^b \varphi = \int_a^c \varphi + \int_c^b \varphi.$$

## 0.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

**Définition 3** *Une fonction $f$ définie sur un segment $[a,b]$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (x_0, \dots, x_n)$ de $[a,b]$ telle que*

- $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ *la fonction $f$ est continue sur* ***l'ouvert*** $]x_k, x_{k+1}[$
- *et $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ la fonction $f$ admet des limites finies en $x_k^+$ et en $x_{k+1}^-$.*

*On note $\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.*




**Remarques** *1) L'ensemble des fonctions continues par morceaux $\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ est un sous-ensemble de l'ensemble des fonctions en escaliers $\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R})$.*

*2) L'ensemble $\mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$.*

**Propriété (densité des fonctions en escaliers dans les fonctions continues par morceaux)**
*Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ alors $\forall \varepsilon > 0$, $\exists (\varphi, \psi) \in (\mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}))^2$ telles que*

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{sur } [a,b] \qquad \text{et} \qquad 0 \leq \psi - \varphi \leq \varepsilon \quad \text{sur } [a,b].$$

*Une reformulation donne : il existe une suite de fonction en escalier $(\varphi_n)$ (resp. $(\psi_n)$) qui converge uniformément vers $f$ sur $[a;b]$ en étant inférieur (resp. supérieur) à $f$.*

**Propriété (définition)**
*Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ alors*

- *l'ensemble $\left\{ \int_a^b \varphi \ : \ \varphi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } \varphi \leq f \right\}$ admet une borne supérieure $M$*
- *l'ensemble $\left\{ \int_a^b \psi \ : \ \psi \in \mathcal{E}([a,b],\mathbb{R}) \text{ et } \psi \geq f \right\}$ admet une borne inférieure $m$*

*telles que $M = m$. On appelle ce nombre l'intégrale de $f$ sur $[a,b]$ et on le note*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(t)dt = \int_{[a,b]} f.$$

# 1 Rappels et fonctions continues par morceaux

## 1.1 Intégration d'une fonction continue sur un segment

• Aucune construction de l'intégrale n'est à connaitre mais il faut retenir l'interprétation de $\int_a^b f(t)dt$ comme étant « l'aire sous la courbe de $f$ au dessus de $[a;b]$ ».

• On n'oublie pas le théorème fondamentale de l'analyse :

| |
|---|
| Si $I$ est un intervalle, $f$ est continue sur $I$ et $x_0 \in I$<br>alors $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)dt$ est l'unique primitive de $f$ sur $I$ s'annulant en $x_0$. |

En effet ce théorème nous permet d'appréhender le nombre $\int_a^b f(t)dt$ à l'aide d'une primitive $F$ de $f$ : $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

• Dans le cas (vu en première année) des fonctions continues sur un segment $[a;b]$ l'intégrale possède les propriétés notables suivantes :

| |
|---|
| la linéarité, la positivité, la croissance, la relation de Chasles, l'inégalité triangulaire,<br>si $f$ est continue et positive sur $[a;b]$ et si $\int_a^b f = 0$ alors $f = 0$ sur $[a;b]$. |

## 1.2 Fonctions continues par morceaux

**Définition** des fonctions continues par morceaux sur un intervalle de $\mathbb{R}$ :
**ATTENTION** il ne faut pas oublier que dans la définition de la continuité par morceaux il y a des limites qui doivent être vérifiées.

## 1.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Connaissant l'intégrale d'une fonction continue sur un segment, on peut définir comme on l'imagine (c'est-à-dire par morceaux) l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.
On conserve les propriétés précédentes hormis la dernière :

| |
|---|
| la linéarité, la positivité, la croissance, la relation de Chasles, l'inégalité triangulaire. |

## 1.4 Calcul d'intégrale

Pour le calcul intégrale, nous retenons essentiellement la vision de l'intégrale fourni par le théorème fondamental :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \qquad \text{avec } F \text{ une primitive de } f \text{ sur } [a;b]$$

• Ainsi notre premier outil de calcul de $\int_a^b f$ est la reconnaissance d'une primitive de $f$.

- Pour le calcul intégrale, nous pouvons aussi faire appel à l'Intégration Par Parties :

$$\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$$

Il faut savoir faire rapidement une intégration par parties mais il faut aussi savoir que ce théorème a des hypothèses : $u$ et $v$ doivent être de classe $C^1$ sur le **segment** $[a;b]$.

- Le troisième outils pour le calcul intégrale est le changement de variable :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Notre intégrale de départ pouvant être celle de gauche ou celle de droite.

Là encore, il faut savoir faire rapidement un changement de variable mais il faut aussi savoir que ce théorème a des hypothèses : $f$ doit être continue sur $[\varphi(a);\varphi(b)]$ et $\varphi$ doit être de classe $C^1$ sur $[a;b]$.

# 2 Intégrales généralisées

## 2.1 Intégrales généralisées sur $[a;+\infty[$

Soit $f : [a;+\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie en $+\infty$.

## 2.2 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque

- **Sur** $[a;b[$

Soit $f : [a;b[\to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie en $b$.

- **Sur** $]a;b]$

Soit $f : ]a;b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)dt$ admet une limite finie en $a$.

- **Sur** $]a;b[$

Soient $f : ]a;b[\to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et $c \in ]a;b[$.
L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente si les 2 intégrales $\displaystyle\int_a^c f(t)dt$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)dt$ sont convergentes.

## 2.3 Intégrales de référence

- (pb en 0) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ dt$ est .....
- (pb en $+\infty$) L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}\ dt$ est convergente $\iff$ .....
- (pb en $+\infty$) L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\ dt$ est convergente $\iff$ .....
- (pb en 0) L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\ dt$ est convergente $\iff$ .....
- (pb en $a$) L'intégrale $\displaystyle\int_1^a \frac{1}{(t-a)^\alpha}\ dt$ est convergente $\iff$ .....

**ATTENTION :** L'intégrale $\displaystyle\int_{[1;+\infty[} f(t)dt$ est convergente $\not\Longrightarrow f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0$.

De même $f(x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0 \not\Longrightarrow$ l'intégrale $\displaystyle\int_{[1;+\infty[} f(t)dt$ est convergente.

## 2.4 Propriétés des intégrales généralisées

### 2.4.1 Linéarité

Comme pour le cas des fonctions continue (par morceaux) sur un segment, on a la linéarité de l'intégrale **sauf** que pour une intégrale généralisé il y a une notion de convergence :

Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors

1) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt$ converge

2) $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(t) + \beta g(t))dt = \alpha \int_a^b f(t)dt + \beta \int_a^b g(t)dt$

### 2.4.2 Positivité et croissance

Comme pour le cas des fonctions continue (par morceaux) sur un segment, on retrouve la positivité et la croissance de l'intégrale.

Comme pour le cas des fonctions continue sur un segment, on retrouve la propriété :

si $f$ est continue sur $I$, si $f \geq 0$ sur $I$ et si $\displaystyle\int_I f = 0$ **alors** $f = 0$ sur $I$.

### 2.4.3 Relation de Chasles

Comme pour le cas des fonctions continue (par morceaux) sur un segment, on retrouve la la relation de Chasles avec une notion de convergence en plus.

## 2.5 Outils de calcul

Comme pour le cas des fonctions continue (par morceaux) sur un segment, pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ on peut :

- si on connait une primitive $F$ de $f$, calculer $\displaystyle\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ puis faire un passage à la limite pour trouver $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ ;
- faire une Intégration Par Parties **licite**

Si $u$ et $v$ sont de classe $C^1$ sur $]a;b[$ et si le produit $uv$ admet des limites finies en $a^+$ et en $b^-$ alors $\displaystyle\int_a^b uv'$ et $\displaystyle\int_a^b u'v$ sont de même nature.
En cas de convergence, $\displaystyle\int_a^b u'v = \lim_{t\to b} u(t)v(t) - \lim_{t\to a} u(t)v(t) - \int_a^b uv'$

– faire un changement de variable **licite**

Si $f : ]a,b[ \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux et si $\varphi : ]\alpha,\beta[ \to ]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $C^1$
alors $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$ sont de même nature.
En cas de convergence, $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\ dt = \int_a^b f(x)\ dx$.

# 3 Fonctions intégrables

## 3.1 Fonctions positives

Si $f : [a,b[ \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux et **positive** sur $[a;b[$
alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge $\Longleftrightarrow$ la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est majorée sur $[a,b[$.

On en déduit alors un théorème de comparaison entre les fonctions **positives** :

Si $f, g : [a,b[ \to \mathbb{C}$ sont continues par morceaux et $0 \leq f \leq g$ sur $[a;b[$ alors

- ⋆ la convergence de $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ implique celle de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$
- ⋆ la divergence de $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ implique celle de $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$.

## 3.2 Intégrale absolument convergente / fonction intégrable

- Une fonction $f$ est dite intégrable sur $I$ si $f$ est continue par morceaux sur $I$ et si l'intégrale $\displaystyle\int_I |f(t)|\ dt$ est convergente.
On dit aussi dans ce cas que l'intégrale $\displaystyle\int_I f(t)\ dt$ est absolument convergente.

- On note $L^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur $I$ : c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Comme on pouvait l'espérer, une intégrale absolument convergente est convergente.
Ce qu'on peut reformuler par une fonction $f$ intégrable sur $I$ admet une intégrale $\displaystyle\int_I f(t)dt$ convergente.

De plus, si $f$ est intégrable sur $I$ on a $\displaystyle\left|\int_I f(t)\ dt\right| \leq \int_I |f(t)|\ dt$.

On en déduit que si $f$ est continue et intégrable sur $I$ alors $\displaystyle\int_I |f(t)|\ dt = 0 \Longrightarrow f = 0$ sur $I$.

### 3.3 Critère d'intégrabilité

Des deux sous-parties précédentes, on en déduit que :

Sur $[a;b[$

- Si $|f| \leq |g|$ alors l'intégrabilité de $g$ implique celle de $f$.
- Si $f(x) = \underset{x\to b}{O}(g(x))$ alors l'intégrabilité de $g$ implique celle de $f$.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$ alors l'intégrabilité de $g$ équivalente à celle de $f$.

# Table des matières

0.1 Intégrale d'une fonction en escalier . . . 1
0.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux . . . 4

**1 Rappels et fonctions continues par morceaux** **5**
1.1 Intégration d'une fonction continue sur un segment . . . 5
1.2 Fonctions continues par morceaux . . . 5
1.3 Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment . . . 5
1.4 Calcul d'intégrale . . . 5

**2 Intégrales généralisées** **7**
2.1 Intégrales généralisées sur $[a;+\infty[$ . . . 7
2.2 Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque . . . 7
2.3 Intégrales de référence . . . 7
2.4 Propriétés des intégrales généralisées . . . 8
2.4.1 Linéarité . . . 8
2.4.2 Positivité et croissance . . . 8
2.4.3 Relation de Chasles . . . 8
2.5 Outils de calcul . . . 8

**3 Fonctions intégrables** **9**
3.1 Fonctions positives . . . 9
3.2 Intégrale absolument convergente / fonction intégrable . . . 9
3.3 Critère d'intégrabilité . . . 10