

1 Révision sur les suites réelles

1.1 Présentation

Définition :

Une suite réelle est une application de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans l'ensemble $\mathbb{R}$:

$$(u_n) : \begin{cases} \mathbb{N} & \rightarrow \mathbb{R} \\ n & \mapsto u_n. \end{cases}$$

ATTENTION : il ne faut pas confondre u_n qui est
et (u_n) qui est

Comment est construite une suite :

Une suite peut être définie :

- explicitement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n}$
- par récurrence : $(u_n) = \begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{n}u_n \end{cases}, (v_n) = \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = v_{n+1} + v_n \end{cases}$
- à l'aide d'une somme : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sum_{k=1}^n k, \forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$
- à l'aide d'un produit : $\forall n \in \mathbb{N}^*, P_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k}\right)$
- à l'aide d'une intégrale : $\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$
- implicitement : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = x^n + x - 1$. On peut montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe un unique $x_n \geq 0$ tel que $f(x_n) = 0$. On définit ainsi une suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Plan d'étude d'une suite :

Les questions usuelles face à une étude de suite sont :

- Vérifier que la suite est bien définie.
(Notamment pour les suites définies par récurrence et implicitement.)
- Calculer, lorsque cela est possible, explicitement le terme général de cette suite.
(On pense aux suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, linéaire d'ordre 2 ...)
- Étudier son éventuelle monotonie.
- Étudier si elle est majorée, minorée, bornée.
- Étudier sa convergence ou divergence.

1.2 Les suites classiques

1.2.1 Les suites arithmétiques

Définition 1

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} si

Proposition Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0} .

- Expression explicite : $\forall n \geq n_0, \quad u_n =$
- Limite (si (u_n) est réelle) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$
- Somme des termes (pour $n_0 = 0$) : $\sum_{k=0}^n u_k =$

Théorème Soit $n \in \mathbb{N}$

- $\sum_{k=0}^n k =$
- $\sum_{k=0}^n k^2 =$
- $\sum_{k=0}^n k^3 =$

Exercice 1 Montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ des suites arithmétiques réelles est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

1.2.2 Les suites géométriques

Définition 2

Une suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est dite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} si

Exemple Les réels θ et x étant fixés, les suites $(e^{in\theta})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(e^{nx})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites géométriques de raisons

Proposition Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0} .

• Expression explicite : $\forall n \geq n_0, \quad u_n =$

• Limite (pour $u_{n_0} > 0$ et $q \in \mathbb{R}$) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$

• Somme des termes (pour $n_0 = 0$) : $\sum_{k=0}^n u_k = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$

Exercice 2 L'ensemble $\mathcal{G}$ des suites géométriques réelles est-il un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

Exercice 3 Soient $q \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, calculer $\sum_{k=3}^{n+8} q^{k+1}$.

Exercice 4 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S = \sum_{k=0}^n \cos\left(\frac{2ik\pi}{n}\right)$.

Corollaire 1 Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 alors la somme des racines n -ième de l'unité est

En particulier avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ on a

1.2.3 Les suites arithmético-géométriques

Définition par récurrence :

Définition 3 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. On dit qu'elle est arithmético-géométrique s'il existe deux constantes a et b ($a \neq 1$ et $b \neq 0$ sinon on est dans les deux cas précédents) tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dots$$

Exercice 5 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = 3u_n + 4$. Calculer u_n .

Expression explicite : Méthode

- Recherche de la limite éventuelle en résolvant $al + b = l$.
- Étude de la suite auxiliaire $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - l$.
 - ★ Montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a .
 - ★ En déduire son expression explicite.
- Expression explicite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en utilisant : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n + l$.

Remarque *Attention* : Les réels a et b ne doivent pas dépendre de n .

Exercice 6 Trouver le terme général de la suite définie par $u_{n+1} = \frac{2}{n}u_n$.

1.2.4 Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition par récurrence :

Définition 4 Une suite récurrente linéaire d'ordre 2 est une suite (u_n) qui vérifie la relation de récurrence

avec a et b des constantes.

Exercice 7 On définit les suites (u_n) et (v_n) par

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \end{cases} \quad \text{et} \quad (v_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = -\frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

Donner leurs expressions explicites.

Expression explicite :

Proposition Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

avec a et b des constantes.

On note (E) : l'équation caractéristique associée.

- Si (E) admet deux solutions distinctes q_1 et q_2 alors
- Si (E) admet une seule solution q_0 alors

En particulier si a et b sont **réels** et que (E) admet deux solutions complexes
alors

Mais si de plus **les deux premiers termes sont réels**, alors la suite (u_n) est

On préférera alors le résultat suivant :

En écrivant $q = \rho e^{i\theta}$,

1.3 Convergence d'une suite

Définition 5 Une suite réelle (u_n) est dite convergente vers $l \in \mathbb{R}$ lorsque pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang au delà duquel on a $|u_n - l| \leq \varepsilon$:

Dans le cas contraire la suite est dite

Remarques

- Dans le cas d'une suite complexe, on écrit la même chose ...en prononçant **module** plutôt que **valeur absolue**.
Pour un espace vectoriel, on a besoin d'une norme...
- On peut définir de même la définition de la divergence vers $+\infty$.

Exercice 8 Donner un exemple de suite réelle non majorée, mais ne tendant pas vers $+\infty$.
Donner un exemple de suite qui tend vers $+\infty$ mais non croissante (pas même à partir d'un certain rang).

Propriété 1 Soient (u_n) et (v_n) deux suites, ℓ_1 et ℓ_2 deux scalaires, α et β deux autres scalaires alors

- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1$ et $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2$ alors
- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2$ alors $\alpha u_n + \beta v_n$
- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2$ alors $u_n v_n$
- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1$ et $\ell_1 \neq 0$ alors

Propriété 2 Soient (z_n) une suite complexe et ℓ un complexe alors

- Si $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ alors $\overline{z_n}$ et la réciproque est
- Si $z_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ alors $|z_n|$ et la réciproque est

Théorème Majoration en module par une suite de limite nulle

Soient (u_n) et (a_n) deux suites et ℓ un scalaire.

Si à partir d'un certain rang $|u_n - \ell| \leq a_n$ et $a_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors

Corollaire 2

Le produit d'une suite bornée par une suite de limite nulle est

1.4 Limites et inégalités pour des suites réelles**Théorème**

Une suite **réelle** convergente est

Remarque Les raisonnements par epsilonage que vous effectuez sont pour démontrer des résultats comme celui du théorème :

- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ alors à partir d'un certain rang $|a_n| \leq 1$.
- Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \neq 0$ alors à partir d'un certain rang $|u_n| \geq \frac{|\ell|}{2}$ (en particulier les u_n sont non nuls).

Théorème Soient (u_n) et (v_n) deux suites **réelles** et ℓ_1 et ℓ_2 deux réels.

Si à partir d'un certain rang $u_n < v_n$, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_1$ et $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell_2$

alors

Attention : On ne passe jamais une inégalité à la limite pour obtenir une convergence. On ne passe à la limite que si la convergence est déjà assurée.

Attention : Lorsqu'on passe des inégalités strictes à la limite celles-ci deviennent **larges**.

1.5 Comparaison à une suite géométrique

Proposition (*Exercice à savoir refaire*)

Soient (u_n) une suite et ℓ un scalaire.

S'il existe $k \in [0; 1[$ tel qu'à partir d'un certain rang

$$|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$$

alors

.....

Exercice 9 Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + 1$.

- Montrer que f a un unique point fixe que l'on notera α .
- Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
- Conclure quand à la convergence de la suite.

Corollaire 3 (Exercice à savoir refaire)

Soient (u_n) une suite et ℓ un réel.

Si à partir d'un certain rang $u_n \neq 0$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \ell$ avec $\ell < 1$

alors

1.6 Suites extraites / divergence

Définition 6

Une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite extraite de $(u_n)_{n \geq 0}$ s'il existe une application strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{\varphi(n)}$.

Théorème Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite admettant une limite (finie ou non) alors :

toute suite extraite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers la même limite que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Application 1 :

Proposition Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

Si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ alors

Exemple Tracer la construction de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(2 - u_n) \end{cases}$
Que comprend-on graphiquement ?

Application 2 :

Exercice 10 Montrer que la suite $(\sin(\frac{k\pi}{4}))$ diverge.

1.7 Théorèmes d'existence de limite

Théorème des suites monotones :

Théorème (suites monotones)

Une suite réelle croissante est soit convergente soit elle tend vers $+\infty$.

Si une suite (u_n) est croissante et majorée par un réel M

alors

De plus pour tout $n \in \mathbb{N}$,

Remarques

- **Attention :** ce théorème assure l'existence d'une limite mais ne détermine pas cette limite. Pour la déterminer on peut passer une relation vérifiée par (u_n) à la limite (car on sait qu'elle existe).
- On a bien entendu le résultat similaire pour les suites décroissantes.
- Une suite monotone n'a donc que deux comportements possibles : on peut ainsi envisager des raisonnements par l'absurde.

Exercice 11 Montrer que la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n}$ est convergente.

Théorème d'encadrement :

Théorème (d'encadrement)

Si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites vérifiant

.....

Alors

Remarque On a les résultats analogues :

- Si $u_n \leq v_n$ et $u_n \rightarrow +\infty$ alors $v_n \rightarrow +\infty$.
- Si $u_n \leq v_n$ et $v_n \rightarrow -\infty$ alors $u_n \rightarrow -\infty$.

Théorème des suites adjacentes :

Définition 7

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si

.....

Théorème

Deux suites adjacentes

Exercice 12 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit S_n par : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$. Montrer que les deux suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. Conclure quand à la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

1.8 Relations de comparaison

Un exercice très classique :

Exercice 13 Montrer que $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ tend vers une limite finie que vous déterminerez.

Définition 8 Relation de comparaison de suites

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles avec (v_n) qui ne s'annule pas au delà d'un certain rang. On dit que

- (u_n) est **négligeable** devant (v_n) , et on note $u_n = o_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ lorsque
- (u_n) est **équivalente à** (v_n) , et on note $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ lorsque
- (u_n) est **dominée** par (v_n) , et on note $u_n = O_{n \rightarrow +\infty}(v_n)$ lorsque

Attention : on rappelle qu'il ne faut jamais sommer des équivalents, ni les passer à l'exponentiel...

Toutefois, on en a parfois l'envie : dans ce cas là

Exercice 14 Montrer que si $u_n \sim \frac{1}{n}$ et $v_n \sim \frac{2}{n}$, alors $u_n + v_n \sim \frac{3}{n}$.

Exercice 15 Montrer qu'au voisinage de 0, $e^x \sim 1 + x + \frac{x^2}{2} \sim 1 - x + 2x^3$.

Commenter ce résultat.

Propriété 3 Soient $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \rightarrow 0$.

- | | | |
|---------------------------|--|---|
| • $\sin u_n \sim u_n$ | • $\tan u_n \sim u_n$ | • $\arctan u_n \sim u_n$ |
| • $\ln(1 + u_n) \sim u_n$ | • $sh u_n \sim u_n$ | • $\arcsin u_n \sim u_n$ |
| • $e^{u_n} - 1 \sim u_n$ | • $(1 + u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$ | • $\cos u_n - 1 \sim -\frac{1}{2}u_n^2$ |

Propriété 4 Soient α, β, q et ρ des réels vérifiant $|q| < 1$, $\rho > 1$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

Les suites suivantes tendent vers 0 et on a dans l'ordre de négligeabilité :

$$\frac{1}{n^n} \ll \frac{1}{n!} \ll q^n \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{(\ln n)^\beta}.$$

Les suites suivantes tendent vers $+\infty$ et on a dans l'ordre de négligeabilité :

$$(\ln n)^\beta \ll n^\alpha \ll \rho^n \ll n! \ll n^n$$

avec $\ll$ signifiant « est négligeable devant ».

Exercice 16 Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $u_n = \ln \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)$.

Rappel : pour une étude au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}^*$, on se ramènera systématiquement à 0 en écrivant la variable $a + u$ avec u proche de 0.

Exercice 17 Étudier la limite de $u_n = \left(\sin \left(\frac{n\pi}{2n+1} \right) \right)^{n^2}$.

Rappel : pour étudier une limite notre recherche est graduelle :

- 1) il n'y a peut être pas de problème et la limite est "immédiate",
- 2) si c'est une forme indéterminée de la proposition précédente, on invoque simplement la croissance comparée
- 3) il faut peut-être faire appel aux équivalents
- 4) on a envie de sommer, composer des équivalents : on passe aux DL

Exercice 18 Étudier la limite de $\frac{\sin u - \ln(1+u)}{e^u - \cos u} \ln(u)$ en 0.

1.9 Applications au cas des suites définies par récurrence

1.9.1 Cadre

On s'intéresse ici aux suites définies par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Attention : Il peut arriver que la suite soit une suite finie c'est-à-dire qu'il peut exister un entier n_0 à partir duquel u_n n'est plus défini (i.e. $\forall n \geq n_0$, u_n n'est pas défini).

Exemple On définit la suite (u_n) par récurrence avec $u_0 = -\frac{1}{2}$ et $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$.

Ainsi $u_0 = -\frac{1}{2}$

Remarques

- La suite étant définie par récurrence, les propriétés de la suite sont souvent démontrées par récurrence.
- Les propriétés sur la fonction f ne sont souvent valables que sur un intervalle I .
Ainsi pour en déduire quelque chose sur la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$, **il est important de contrôler que** $u_n \in I$ **pour tout** $n \geq n_0$.

1.9.2 Représentation d'une telle suite

Exemple Représenter la suite définie par $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$

1.9.3 Définition sur $\mathbb{N}$ de la suite et caractère borné de la suite

Définition 9 Soient f une fonction réelle et I un intervalle inclus dans le domaine de définition de f .

On dit que I est un intervalle stable par f si

Proposition Soient f une fonction réelle, (u_n) une suite définie par u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ et n_0 un entier naturel.

Si I est un intervalle stable par f et si $u_{n_0} \in I$

alors

Preuve

Remarques Grâce à cette proposition, qu'il faut redémontrer à chaque fois, on montre que

- « La suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ est bien définie. »
- si I est bornée (resp majorée, minorée), alors (u_n) est bornée (resp majorée, minorée)
- si la suite (u_n) tend vers une limite ℓ alors cette limite est dans I ou est une extrémité de I .

1.9.4 Limites éventuelles

Si une telle suite admet une limite alors pour la déterminer on va passer à la limite la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ mais le peut-on ?

Proposition

Soient (u_n) une suite convergente de limite ℓ et f une fonction

alors $f(u_n)$

Remarque Si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} L$ alors $f(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} L$.

1.9.5 Monotonie de (u_n)

Pour étudier la monotonie de la suite (u_n) il faut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$.

On remarque donc que la monotonie de la suite (u_n) n'est pas liée à la monotonie de f mais au signe de la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$.

Un dessin aide fortement à comprendre la monotonie des suites définies par $u_{n+1} = f(u_n)$.

Exemple Donner sans justification la monotonie des suites suivantes

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} a_0 = 0.8 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = a_n^2 \end{cases}$$

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} b_0 = 1.1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = b_n^2 \end{cases}$$

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} v_0 = -1.5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \sqrt{v_n^2 + 1} \end{cases}$$

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} : \begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

Remarque / Propriété

- Si I est un intervalle stable par f et que $u_0 \in I$, alors pour tout entier n , $u_n \in I$.
- De plus si f est croissante sur I alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone.
- Si f est décroissante sur I alors les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones (de sens de variations contraire).

1.9.6 Plan d'étude d'une fonction

Exercice 19 Étudier la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
$$\begin{cases} v_0 = -1.5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \sqrt{v_n^2 + 1} \end{cases} .$$

Exercice 20 Étudier la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
$$\begin{cases} a_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = a_n^2 \end{cases} .$$

Exercice 21 Étudier la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
$$\begin{cases} w_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \frac{1}{2}e^{-w_n} \end{cases} .$$

Exercice 22 Étudier la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$:
$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n} \end{cases} .$$

Rappel**Théorème** *Inégalité des accroissements finies*

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Si

Plan d'étude :

L'énoncé (que l'on lit en entier, comme toujours) peut être directif ou non... Si oui, répondre aux questions !

Si l'énoncé ne guide pas :

On commence toujours par un dessin (on peut aussi faire des simulations numériques...) : courbe de f (quitte à utiliser la machine), première bissectrice (on en profite pour repérer les points fixes **ET** les intervalles où $f(x) \geq x \dots$), on place les premiers termes de la suite, on observe des conjectures.

Que l'on soit guidé ou pas, on peut s'attendre ou proposer les points suivants :

- **Étude de f** : Domaine de définition, variations, si possible en déduire des intervalles stables par f .
- **Vérifier que la suite est bien définie** : comprendre que *tous* les termes sont bien définis. Se fait par récurrence avec des intervalles stables par f .
- **Points fixes** (qui seront les limites réelles en cas de convergence quand la fonction est continue sur son domaine). **Détermination** en résolvant $f(\ell) = \ell$ (si on sait résoudre) **ou localisation** en étudiant $x \mapsto f(x) - x$ (on connaîtra le nombre de points fixes, on pourra les situer sans en donner des valeurs exactes).
- Convergence/divergence :
 - (1ère piste à essayer) Établir une convergence par **comparaison à une suite géométrique** de raison $k \in [0, 1[$:
obtenir pour n assez grand $|u_{n+1} - \ell| \leq k|u_n - \ell|$ se fait en général en écrivant $|u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)|$ puis il y a un outil pour cela, n'est-il pas ? Quand cette piste échoue, on passe aux points suivants.
 - Prouver (le cas échéant) la **monotonie de la suite** : principalement par étude de $x \mapsto f(x) - x$. Veillez à utiliser un intervalle I stable par f ... Bien sûr :
Si u est monotone bornée alors u converge et vers l'un des points fixes de f (idéal s'il n'y a qu'un point fixe dans I) ;
Si u est monotone et ne peut pas converger vers un point fixe (par exemple parce qu'il n'y en a pas...) alors u diverge (raisonnement par l'absurde).
 - Si u n'est pas monotone, pensez à utiliser les **suites extraites** : Si f est décroissante sur I , avec I stable par f , les suites extraites $(u_{2n})_n$ et $(u_{2n+1})_n$ sont monotones (idéal si I est en plus borné).
Attention : Les limites possibles de ces suites extraites sont des points fixes de $f \circ f$ ie des solutions de $f(f(\ell)) = \ell$ (**Attention** : il peut y avoir d'autres solutions que les points fixes de f).

2 Séries numériques

2.1 Définition et premières propriétés

2.1.1 Définitions

Définition 10 Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes.

- Pour $p \in \mathbb{N}$, le nombre $S_p = \sum_{n=0}^p u_n$ est appelé
.....
- On dit que la **série de terme général** u_n converge
si
- Dans ce cas $\lim_{p \rightarrow +\infty} S_p$ est appelée de la série de terme général u_n
et est notée
- Dans le cas contraire, on dit que la série de terme général u_n

Remarque

- Lorsqu'on écrit $\sum u_n$ cela signifie
Attention : ce n'est pas un objet mathématique, c'est juste une abréviation autorisée.
Ainsi on ne peut pas trouver $\sum u_n$ dans
- Pour pouvoir écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ il faut déjà
et cela signifie

Exercice 23 La suite $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 + n^2}$ est-elle la suite des sommes partielles d'une série ?

Étudier la convergence de la suite (S_n) .

Attention : Une somme de série $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ doit être comprise comme une limite et non comme une somme.

Les théorèmes d'analyse concernant les additions ne s'étendent pas (a priori) aux sommes de séries.

Par exemple, la limite d'une somme finie est la somme des limites mais peut-on le généraliser aux sommes des séries ?

i.e. si $\lim_{p \rightarrow +\infty} u_{k,p} = u_k$ alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n u_{k,p} = \sum_{k=0}^n u_k$ mais on **NE** peut **PAS** assurer que $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,p} = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

En cas de convergence d'une série, on s'intéresse souvent à la vitesse de convergence en introduisant

Définition 11 Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes.

Si la série de terme général u_n converge alors pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note

$$R_p = S - S_p =$$

$$\text{avec } S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ et } S_p = \sum_{n=0}^p u_n.$$

Le nombre R_p se nomme

2.1.2 Divergence grossière

Si la série de terme général u_n converge alors avec $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n - S_{n-1} = \dots\dots\dots$$

Or pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - S_{n-1} = \dots\dots\dots$

Ainsi

Proposition Soit $\sum u_n$ une série de terme général u_n .

Si cette série converge alors

Définition 12 Soit une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de nombres réels ou complexes.

Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0

alors on dit que la série de terme général u_n

Remarque La contraposée de notre proposition nous assure que

Si la série de terme général u_n diverge grossièrement alors cette série

Mais attention la réciproque est

On pense au contre exemple suivant :

$$\text{Avec } u_n = \frac{1}{n} \text{ on a}$$

On ne trouvera jamais sur aucune copie, $u_n \rightarrow 0$ donc $\sum u_n$ converge.

2.1.3 Linéarité

Proposition Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries de termes généraux u_n et v_n et soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$.

Si ces deux séries convergent alors

2.1.4 Suites et séries

On remarque que si (u_n) est une suite et que $v_n = u_{n+1} - u_n$

alors $\sum_{k=0}^{n-1} v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = \dots\dots\dots$

Ainsi l'étude de la suite (u_n) peut se ramener à l'étude de la série de terme général v_n :

Proposition Soit $\sum u_n$ une suite.

La suite (u_n) converge si et seulement si

2.2 Séries de référence

Pour étudier la nature d'une série de terme général u_n , notre premier réflexe est de trouver un équivalent de (ou de dominer) u_n plus simple et dont nous connaissons le comportement de la série.

Mais pour conclure, il nous faut déjà bien connaître les séries de référence.

Séries géométriques :

Théorème Soit $z \in \mathbb{C}$.

La série $\sum z^n$ est convergente si et seulement si

Plus précisément,

- si $|z| \geq 1$, cette série
- si $|z| < 1$, cette série et

Exercice 24 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = (-1)^n x^{2n}$ pour $x \in]-1; 1[$.

Exercice 25 Soit $\theta \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que la série de terme général $a_n = \frac{1}{2^n} e^{in\theta}$ converge et calculer sa somme.

Séries de Riemann :

Théorème Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si

Preuve Il faut savoir démontrer ce théorème. La manière la plus naturelle étant d'utiliser les comparaisons somme/intégrale.

Remarques

- si $\alpha \leq 0$, cette série
- si $\alpha \in]0; 1]$,
- Pour $\alpha = 1$, le terme général vaut $\frac{1}{n}$, c'est la série dite **harmonique**.

On montre avec la comparaison somme/intégrale que $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \dots\dots\dots$

- Pour $n = 2$, le terme général vaut $\frac{1}{n^2}$.

On retiendra que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \dots\dots\dots$

2.3 Séries à termes positifs

2.3.1 Condition de convergence

On remarque que si tous les u_n sont positifs alors la suite des sommes partielles (S_n) est croissante car $S_{n+1} - S_n = u_n \geq 0$.

Donc la suite des sommes partielles de la série de terme général

Proposition Soit (u_n) une suite réelle à termes positifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

La série de terme général u_n converge si et seulement si

Remarque Ce résultat est faux si la suite (u_n) n'est pas positive.

Contre exemple :

2.3.2 Théorème de comparaison et d'équivalence

Théorème (Comparaison)

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles à termes positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq a_n \leq b_n$.

- Si la série $\sum b_n$ converge alors
et
- Si la série $\sum a_n$ diverge alors

Preuve**Théorème** (Équivalence)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles à termes positifs telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$

Preuve

Exercice 26 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{1}{n^2 + \cos(n)} \quad ; \quad v_n = \ln(1 + 2^{-n}) \quad ; \quad w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad ; \quad a_n = \frac{\ln n}{n^2 + 3}.$$

Corollaire 4 (du théorème de comparaison)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles à termes positifs telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

Si la série $\sum v_n$ converge alors

Exercice 27 Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \binom{n}{2} a^{2n}$.

Exercice 28 Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles positives. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \max(u_n, v_n)$. Montrer que si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent alors $\sum w_n$ converge.

Exercice 29 Soit (u_n) une suite réelle positive.

Montrer que si $\sum u_n$ converge alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\sum u_n^p$ converge.

2.3.3 Comparaison série/intégrale : le cas décroissant positif

Théorème (*Comparaison série/intégrale*)

Soit f une fonction continue (par morceaux) à valeurs réelles positives et décroissante sur un intervalle $[n_0; +\infty[$, alors il y a équivalence entre :

- La série $\sum_{n \geq n_0} f(n)$ converge.
- « La fonction f est intégrable sur $[n_0; +\infty[$ » c'est-à-dire que $\int_{n_0}^X f(t)dt$ possède une limite finie lorsque X tend vers $+\infty$.

Méthode de la comparaison série-intégrale sur le cas explicite $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$.

1-ière application : justifier la convergence ou la divergence d'une série

Exercice 30 Pour quelles valeurs de α la série $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ est-elle convergente ?

2-ième application : estimer des sommes partielles de séries divergentes

Exercice 31 Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ à $S_n = \sum_{k=0}^n \sqrt{k}$.

La série harmonique :

Exercice 32 Avec une comparaison série/intégrale, montrer que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln n$.

Exercice 33 Montrer que la suite (a_n) définie par $a_n = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) - \ln n$ converge vers un réel γ .

Ce γ qu'on ne cherchera pas à calculer s'appelle la constante d'Euler.

Indication : on pourra introduire la suite $b_n = a_n - a_{n-1}$.

3-ième application : estimer des restes de séries convergente.

Exercice 34 Donner un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$.

2.3.4 La règle de d'Alembert

Il arrive que u_n n'ait pas d'équivalent simple. On peut alors s'intéresser au rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ (si $u_n \neq 0$). Si on pense aux suites géométrique, on imagine bien que c'est la position de ce rapport vis-à-vis de 1 qui nous importe.

Théorème (Règle de d'Alembert)

Soit (u_n) une suite réelle positive tel qu'à partir d'un certain rang $u_n > 0$.

- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \ell$ avec $\ell < 1$ alors
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \ell$ avec $\ell > 1$ alors
- Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\rightarrow} \ell$ avec $\ell = 1$ alors
- Si $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} \right)$ n'admet pas de limite alors

Preuve

Remarque Appliquer la règle de d'Alembert aux sommes de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ne donne rien et ne permet pas de conclure sur la convergence de la série.

Exercice 35 Déterminer la nature des séries de termes généraux :

$$u_n = \frac{1}{3^n n!} \prod_{k=1}^n (1+2k) \quad \text{et} \quad v_n = \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}.$$

Exercice 36 Déterminer la nature de la série de terme général a_n avec (a_n) définie par

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \frac{n}{2n+1} a_n \end{cases}.$$

2.3.5 La formule de Stirling

Théorème (formule de Stirling)

$$n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim}$$

Preuve La démonstration se fait en deux étapes :

1) On montre qu'il existe $K \in \mathbb{R}^+$ tel que $n! \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} K \sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Pour cela on étudie $a_n = \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$.

On commence par montrer que $(\ln a_n)$ converge ce qui revient à montrer que la série

$\sum (\ln a_{n+1} - \ln a_n)$ converge. Or on trouve que $\ln a_{n+1} - \ln a_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ce qui nous permet de conclure.

2) On trouve classiquement la constante K avec les intégrales de Wallis $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$. À l'aide d'IPP on établit une relation de récurrence entre W_n et W_{n+2} ...

Exercice 37 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$.

2.4 Séries alternées

Définition 13 (série alternée)

Une série $\sum u_n$ est dite alternée lorsque $(-1)^n u_n$ a un signe indépendant de n .

Concrètement, il s'agit de séries de la forme $\sum (-1)^n v_n$ avec tous les v_n positifs (ou tous les v_n négatifs).

Théorème (théorème spécial)

Soit (u_n) une suite de réels positifs, décroissante et convergeant vers 0. Alors

- la série alternée $\sum (-1)^n u_n$
- En notant $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ le reste de cette série alternée, on a
 - ★
 - ★ $|R_n| \leq \dots\dots\dots$

Preuve (à connaître)

Exemple La série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge d'après le théorème spécial car

Remarque : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \dots\dots\dots$

Exercice 38 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

Exercice 39 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{1 + (-1)^n n^{3/4}}$.

2.5 Séries générales

2.5.1 Séries absolument convergentes

La définition qui suit s'applique aux séries de réels ou de complexes. En remplaçant les valeurs absolues par des normes, elle garde du sens dans les espaces vectoriels normés.

Définition 14 (*convergence absolue*)

Une série $\sum u_n$ est dite absolument convergente si

Remarque Dans la partie précédente nous avons vu que la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge

mais

Il existe donc des séries convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

Réciproquement

Théorème (*convergence absolue*)

Toute série complexe absolument convergente est

Exercice 40 Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(2^n)}{n^2}$.

Exercice 41 Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé, montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge.

Définition 15 (*exponentielle d'un complexe*)

Soit $z \in \mathbb{C}$, on définit l'exponentielle de z par $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.

2.5.2 Deux résultats revisités

Reprenons deux résultats sur les séries positives qui s'adaptent bien à l'absolue convergence.

Proposition (*d'Alembert*)

Soit (u_n) une suite complexe tel qu'à partir d'un certain rang $u_n \neq 0$.

- Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ avec $\ell < 1$ alors
- Si $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ avec $\ell > 1$ alors

Proposition (*domination par une série absolument convergente*)

Soit (u_n) une suite complexe.

Soit (v_n) une suite réelle positive telle que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} O(v_n)$.

Si la série $\sum v_n$ converge alors

Exercice 42 Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n \frac{n + \ln n}{n^3 + n^2 + n + 1}$.

2.5.3 Produit de Cauchy

On souhaite ici donner un sens au produit de deux séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ (non nécessairement convergentes) que nous noterons $\sum c_n = \left(\sum a_n\right) \left(\sum b_n\right)$. Nous souhaitons le faire dans l'optique que lorsque $\sum a_n$ et $\sum b_n$ convergent, il en va de même pour $\sum c_n$ et qu'en plus

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Définition 16 (*produit de Cauchy*)

Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites complexes.

Le produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ est la série $\sum c_n$ donnée par

Théorème (*produit de Cauchy*)

Avec les mêmes notations que dans la définition.

Si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$

alors

Corollaire 5 (*Exercice*)

Soient a et b deux nombres complexes. Alors $\exp(a) \exp(b) = \exp(a + b)$.

2.6 Développement décimal d'un réel (rappel)

On sait que tout réel est limite d'une suite de décimaux :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x.$$

Si on note, pour $x \in \mathbb{R}^+ : d_0(x) = \lfloor x \rfloor$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n(x) = \lfloor 10^n x \rfloor - 10 \lfloor 10^{n-1} x \rfloor$. Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{d_n(x)}{10^n}$ est convergente et de somme x . C'est le **développement décimal** de x .

On montre que tous les $d_n(x)$ (pour $n \geq 1$) sont dans $\llbracket 0; 9 \rrbracket$.

Réciproquement, si $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{10^n}$ avec $\alpha_n \in \llbracket 0; 9 \rrbracket$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, alors on a $\alpha_n = d_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N} \dots$ sauf si x est un nombre décimal, auquel cas on peut avoir $\alpha_n = 9$ à partir d'un certain rang (on parle alors de développement impropre).

Table des matières

1	Révision sur les suites réelles	1
1.1	Présentation	1
1.2	Les suites classiques	2
1.2.1	Les suites arithmétiques	2
1.2.2	Les suites géométriques	3
1.2.3	Les suites arithmético-géométriques	4
1.2.4	Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2	5
1.3	Convergence d'une suite	6
1.4	Limites et inégalités pour des suites réelles	7
1.5	Comparaison à une suite géométrique	7
1.6	Suites extraites / divergence	8
1.7	Théorèmes d'existence de limite	9
1.8	Relations de comparaison	10
1.9	Applications au cas des suites définies par récurrence	12
1.9.1	Cadre	12
1.9.2	Représentation d'une telle suite	12
1.9.3	Définition sur $\mathbb{N}$ de la suite et caractère borné de la suite	12
1.9.4	Limites éventuelles	13
1.9.5	Monotonie de (u_n)	13
1.9.6	Plan d'étude d'une fonction	14
2	Séries numériques	16
2.1	Définition et premières propriétés	16
2.1.1	Définitions	16
2.1.2	Divergence grossière	17
2.1.3	Linéarité	18
2.1.4	Suites et séries	18
2.2	Séries de référence	18
2.3	Séries à termes positifs	19
2.3.1	Condition de convergence	19
2.3.2	Théorème de comparaison et d'équivalence	20
2.3.3	Comparaison série/intégrale : le cas décroissant positif	21
2.3.4	La règle de d'Alembert	22
2.3.5	La formule de Stirling	23
2.4	Séries alternées	24
2.5	Séries générales	25
2.5.1	Séries absolument convergentes	25
2.5.2	Deux résultats revisités	26
2.5.3	Produit de Cauchy	27
2.6	Développement décimal d'un réel (rappel)	28