

1 Espaces vectoriels

1.1 Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

On rappelle :

Définition 1 *Espaces vectoriels ; combinaisons linéaires ; sous-espaces vectoriel*

Soit $\mathbb{K}$ un corps (pour nous $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- Un $\mathbb{K}$ **espace vectoriel** est un ensemble E muni d'une loi interne $\ll + : E \times E \rightarrow E \gg$ et d'une loi externe $\ll . : \mathbb{K} \times E \rightarrow E \gg$ qui ont les bonnes propriétés. (Celles qui font que E $\ll$ ressemble $\gg$ à $\mathbb{K}^n$).
- Une **combinaison linéaire** d'éléments de E est un vecteur de la forme $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$, avec les λ_i dans $\mathbb{K}$ ($\ll$ scalaires $\gg$) et les $\vec{u}_i$ dans E ($\ll$ vecteurs $\gg$).
- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Un **sous-espace vectoriel** de E est un sous-ensemble F de E vérifiant :
 - ★ $\vec{0} \in F$
 - ★ $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in F^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ alors $\vec{u} + \lambda \vec{v} \in F$ (i.e. F est stable par combinaison linéaire).

Les espaces vectoriels de référence sont :

-
-
-
-
-

Remarque L'espace $\mathbb{C}^n$ est

.....

Proposition

Un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$ -ev est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Exemples Vous connaissez donc encore plus d'espaces vectoriels :

- $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de

- $C^\infty(I)$ est un sous-espace vectoriel dequi est lui-même un sous-espace vectoriel dequi est
- L'ensemble $S_n(\mathbb{K})$ des matrices symétriques de taille n est un sous-espace vectoriel de
- L'ensemble des suites vérifiant la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ est un sous-espace vectoriel de

Exercice 1 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(V_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E .
Montrer que $V = \bigcap_{i \in I} V_i$ est un sous-espace vectoriel de E .

Définition 2 / Proposition : Sous-espaces vectoriel engendré

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ des vecteurs de E .

On note $\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.

Cet ensemble $\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est un sous-espace vectoriel de E .

(C'est le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$.)

Remarque Il y a souvent deux manières de définir un sous-espace vectoriel :

- à l'aide d'une équation cartésienne : par exemple $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : x + y + z = 0 \right\}$.

Dans ce cas, le sous-espace E est défini comme le noyau d'une application linéaire et

$$\vec{u} \in E = \ker(f) \iff f(\vec{u}) = 0$$

c'est-à-dire qu'appartenir à E revient à vérifier la condition d'appartenance à cet espace.

- à l'aide d'une représentation paramétrique :

par exemple $E = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ (oui c'est le même espace que précédemment).

On retiendra que

$$\vec{u} \in E = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \iff \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \text{tels que } \vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$$

c'est-à-dire qu'appartenir à E revient à dire que l'élément peut s'écrire sous une certaine forme.

Bien entendu il faut maîtriser le passage d'une description à l'autre.

Exercice 2 Montrer que l'ensemble $F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] : P(1) = P(2) = P'(2)\}$ est un sous-espace vectoriel de $E = \mathbb{R}_3[X]$ et donner une famille génératrice.

Exercice 3 Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues. Déterminer l'espace vectoriel engendré par $P = \{f \in E : f \geq 0\}$.

1.2 Familles de vecteurs

1.2.1 Familles libres et liées

Définition 3 Famille libre / liée

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ des vecteurs de E .

- La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est dite **liée** si le vecteur nul est une combinaison linéaire non triviale des vecteurs $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$
c'est-à-dire qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ **non tous nuls** tels que $\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0}$.
- La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est dite **libre** si elle n'est pas liée c'est-à-dire si

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad \left(\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n = \vec{0} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \right).$$

- Une famille (infinie) $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite **libre** si toutes sous-famille finie de $(\vec{u}_i)_{i \in I}$ est libre.

Remarques

- Une famille constitué d'un seul vecteur $\vec{u}$ est libre si et seulement si
- Une famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est dite liée si et seulement si
- Deux vecteurs liés sont dits

Attention : lorsqu'on a plus de deux vecteurs il ne faut pas confondre « non-colinéaire » et « liberté ».

Exemple : avec $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a :

.....

Exercice 4 La famille $\{X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2\}$ est-elle libre ?

Proposition *liberté et polynôme*

Toute famille $\{P_1, \dots, P_n\}$ de polynômes
 est libre.

Exercice 5 Étudier la liberté des familles suivantes :

- 1) $\mathcal{F} = (x \mapsto \cos^3(x), x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(3x))$ 2) $\mathcal{G} = \{g_\lambda : x \mapsto e^{\lambda x} : \lambda \in \mathbb{R}\}$
 3) $\mathcal{H} = \{h_k : x \mapsto |x - k| : k \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$ 4) $\mathcal{K} = \{x \mapsto \cos(x); x \mapsto \sin(x); x \mapsto e^{ix}\}$.

1.2.2 Familles génératrices et bases

Définition 4 *Famille génératrice ; base*

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ des vecteurs de E .

- La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est dite **génératrice de E** si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ c'est-à-dire si $\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = E$.
- La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une **base de E** si elle est libre et génératrice, c'est-à-dire si tout vecteur de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.
- Si $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E et si $\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$ alors les $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont les **coordonnées** de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.

Exemples Donner les bases canoniques des espaces suivants

- $\mathbb{R}^n$
- Le $\mathbb{C}$ -ev $\mathbb{C}^2$
- Le $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}^2$
- $\mathbb{K}_n[X]$
- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Exercice 6 Montrer que $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et exprimer les coordonnées de $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}$.

1.3 Espaces vectoriels de dimensions finies

1.3.1 Définitions

Définition 5 Dimension finie

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

L'espace E est **de dimension finie** s'il existe une famille génératrice finie de E .

Exemple Un raisonnement par l'absurde avec les degrés nous montre que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

Le résultat suivant est fondamental :

Une famille libre de E possèded'éléments qu'une famille génératrice de E .

Théorème Extraction, complétion

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice de E , alors on peut en extraire une base $(e_i)_{i \in I}$ de E .
- Si $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_r)$ est libre et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_p)$ est génératrice de E , alors on peut compléter $\mathcal{E}$ avec une sous-famille de $\mathcal{F}$ pour en faire une base de E .

Il faut connaître ces résultats mais si on vous demande concrètement d'extraire une base d'une famille de cinq vecteurs ou de compléter une famille de trois vecteurs en une base il faut bien avoir compris le résultat suivant :

Si $\vec{v} \in \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ alors $\text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n, \vec{v}) = \text{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.

Exercice 7 Quelle est la dimension de $\text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$?

Corollaire 1 Existence de base

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- Alors E admet une base.
- De plus toutes les bases de E ont le même nombre d'éléments. Ce nombre d'éléments est la **dimension** de E .

Exemple Nous avons $\dim \mathbb{R}^n = \dots$, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = \dots$, $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^n) = \dots$, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dots$, $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = \dots$

1.3.2 Famille de vecteurs

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{F} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E .

Alors $\mathcal{F}$ est libre $\iff \mathcal{F}$ est génératrice de $E \iff \mathcal{F}$ est une base de E .

Exercice 8 Montrer que $\mathcal{B} = ((X - 1)^k : k \in \llbracket 0; n \rrbracket)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Quelles sont les coordonnées d'un polynôme P dans cette base ?

1.3.3 Sous-espaces vectoriels

Proposition dimension d'un sous-espace

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E .

Alors F est de dimension finie et $\dim F \leq \dim E$.

De plus $\dim F = \dim E \iff \dots\dots\dots$

1.3.4 Produit de $\mathbb{K}$ -espace vectoriels

Définition 6 /Proposition : Produit de sous-espaces vectoriel

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

- On note $\prod_{k=1}^n E_k = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ l'ensemble $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

- On munit $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ d'une addition (une loi interne) par

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) + (f_1, f_2, \dots, f_n) =$$

- et d'une multiplication par un scalaire (une loi externe) par

$$\lambda.(e_1, e_2, \dots, e_n) =$$

L'ensemble $(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n, +, \cdot)$ est alors un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Théorème *Produit de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies*

Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ n $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

Alors $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est de dimension finie et

$$\dim \prod_{k=1}^n E_k =$$

Preuve (de $\dim(E \times F) = \dim E + \dim F$)

1.4 Somme / Somme directe / supplémentaires

Exercice 9 *Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Dans quel cas $F \cup G$ est-il un sous-espace vectoriel de E ?*

1.4.1 Cas de deux sev

Définition 7 *Somme de deux sous-espaces*

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

On appelle somme des sous-espaces F et G l'ensemble $F + G = \dots\dots\dots$

C'est un sous-espace vectoriel de E . En fait, $F + G = \dots\dots\dots$

Remarque

Si $F = Vect(f_1, \dots, f_n)$ et $G = Vect(g_1, \dots, g_p)$ alors $F + G = \dots\dots\dots$

Définition 8
Somme directe de deux sous-espaces

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .
 La somme $F + G$ est dite directe, et on la note $F \oplus G$, si tout vecteur $\vec{u}$ de $F + G$

Proposition
Caractérisation

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .
 La somme $F + G$ est dite directe si et seulement si

Théorème
Formule de Grassmann

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$\dim(F + G) =$$

Preuve

Définition 9
Supplémentaires

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .
 On dit que F et G sont supplémentaires dans E si

Théorème
Caractérisation en dimension finie

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- F et G sont supplémentaires dans E
-
-
-

Exercice 10 (en dimension finie)

Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0 \right\}$ et $G = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

Donner la décomposition du vecteur $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Exercice 11 (en dimension infinie)

Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on pose

$$\mathcal{P} = \{f \in E : f \text{ est paire}\} \quad \text{et} \quad \mathcal{I} = \{f \in E : f \text{ est impaire}\}.$$

1. Vérifier que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans E .
3. Donner la décomposition de $x \mapsto e^x$.

Exercice 12 (un deuxième exemple très classique)

Dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$, on pose $F = \{P \in E : X^2 - 1 \mid P\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E .
2. Montrer que F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans E .

Proposition Bases adaptées à une décomposition

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

Soient $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F et $(g_1, \dots, g_p)$ une base de G .

Alors $(f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_p)$ est une base de E ssi

1.4.2 Cas d'un nombre finie quelconque de sev

Définition 10 / Proposition : Somme de sous-espaces vectoriels

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ p sous-espaces vectoriels de E .

On appelle somme des sous-espaces vectoriels E_i l'ensemble

$$\sum_{i=1}^p E_i = E_1 + \dots + E_p =$$

La somme $E_1 + \dots + E_p$ est un sous-espace vectoriel de E .

(C'est le sous-espace vectoriel engendré par)

Preuve

Définition 11 Somme directe de sous-espaces vectoriels

Avec les mêmes notations, la somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est dite **directe** si

Dans ce cas on notela somme $\sum_{i=1}^p E_i$.

Remarque Attention : il **n'est pas** équivalent de dire que $E_1, \dots, E_p$ sont en sommes directes et que pour tout $i \neq j$ $E_i \cap E_j = \{0\}$.

Par exemple, la somme de trois droites dans $\mathbb{R}^2$ n'est jamais directe.

Proposition Caractérisation

Avec les mêmes notation, la somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est dite **directe** si et seulement si

Preuve

Exercice 13 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^3 = I_n$.

On considère les sous-espaces vectoriels

$$E_0 = \{X \in \mathbb{C}^n : MX = X\} \quad E_1 = \{X \in \mathbb{C}^n : MX = jX\} \quad E_2 = \{X \in \mathbb{C}^n : MX = j^2X\}.$$

Montrer que la somme $E_0 + E_1 + E_2$ est directe.

Proposition Concaténation de familles / bases adaptées à une décomposition

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ p sous-espaces vectoriels de E .

- En concaténant des familles génératrices des E_i on obtient une famille de la somme $\sum_{i=1}^p E_i$.

i.e. si $E_i = \text{Vect}(\mathcal{F}_i)$ alors $\sum_{i=1}^p E_i = \text{Vect}(\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_p)$.

- **Si la somme est directe** $\left(\sum_{i=1}^p E_i = \bigoplus_{i=1}^p E_i \right)$ alors en concaténant des familles libres des E_i on obtient une famille de la somme $\bigoplus_{i=1}^p E_i$.

- **Si la somme est directe** $\left(\sum_{i=1}^p E_i = \bigoplus_{i=1}^p E_i \right)$ alors en concaténant des bases des E_i on obtient une de la somme $\bigoplus_{i=1}^p E_i$.

On appelle alors une telle base une base

- Réciproquement : si pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $\mathcal{B}_i$ est une base de E_i et si $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$ est une base de $\sum_{i=1}^p E_i$ alors cette somme est

Exemple Comme $(1, X, X^2, X^3, X^4)$ est une base de $\mathbb{R}_4[X]$ alors $\mathbb{R}_4[X]$ se décompose en somme directe par

$$\mathbb{R}_4[X] = \text{Vect}(1, X) \oplus \text{Vect}(X^2) \oplus \text{Vect}(X^3, X^4).$$

Proposition En dimension finie

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel **de dimension finie** et $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ p sous-espaces vectoriels de E .

Alors la somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est et :

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p E_i \right)$$

De plus on a l'égalité si et seulement si

Preuve

2 Applications linéaires, étude vectorielle

2.1 Généralités

Si vous avez des doutes sur les notions suivantes, il faut revoir le cours de première année.

Définition 12 Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Une application $f : E \rightarrow F$ est dite **linéaire** si elle « se comporte bien » par rapport aux combinaisons linéaires

c'est-à-dire si $\forall (u, v) \in E^2$ et $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$.

Exemples Les applications suivantes sont linéaires.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + y + z, 2x - z) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \rightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & XP' \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ccc} C^\infty(I) & \rightarrow & C^\infty \\ f & \mapsto & f'' + 2f' + f \end{array} \right.$$

Un peu de vocabulaire :

- Un endomorphisme est
- Un isomorphisme est
- Un automorphisme est
- Une forme linéaire est

Remarque Opérations sur les applications linéaires

L'ensemble des applications linéaires de E dans F , $\mathcal{L}(E, F)$, est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Cela signifie que la somme de deux applications linéaires est encore linéaire et que la multiplication d'une application linéaire par un scalaire est encore linéaire.

On sait aussi que la composition de deux applications linéaires est encore linéaire

et que l'inverse d'un isomorphisme est encore un isomorphisme.

Proposition Image directe, image réciproque

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Soient H un sous-espace vectoriel de E et G un sous-espace vectoriel de F .

L'ensemble $f(H) = \{f(x) : x \in H\}$ est un sous-espace vectoriel de

L'ensemble $f^{-1}(G) = \{x \in E : f(x) \in G\}$ est un sous-espace vectoriel de

Parmi ces sous-espaces vectoriels deux nous intéressent fortement :

Définition 13 *Noyau et image*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- Le sous-espace vectoriel $f(E) = \{f(x) : x \in E\} \subset F$ est appelé image de f et est noté $\text{Im}(f)$.
- Le sous-espace vectoriel $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in E : f(x) = 0\} \subset E$ est appelé noyau de f et est noté $\ker(f)$.

Remarque On remarque que $\ker f$ est « l'ensemble des ...tels que ... » alors que $\text{Im}(f)$ est « l'ensemble des ..., avec ...décrivant ... ».

La clef pour s'en sortir est de savoir **lire** les choses correctement.

Exemples

- L'ensemble $\{(a, b, 2b - a) : (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ peut être vu à la fois comme l'image de $(a, b) \mapsto (a, b, 2b - a)$, le noyau de $(x, y, z) \mapsto x - 2y + z$ (cela demande un peu de travail) ou comme l'espace engendré par $(1, 0, -1)$ et $(0, 1, 2)$.
- Les suites de Fibonacci (vérifiant la relation $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$) peuvent être vues comme le noyau de l'application

Il faut savoir trouver une base et la dimension de l'image et du noyau. Un résultat souvent utile pour faire ça est le suivant

Proposition *famille génératrice de l'image*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice de E (par exemple une base de E) alors $(f(e_1), \dots, f(e_p))$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

i.e. si $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ alors $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$.

Proposition *Noyau/injectivité, Image/surjectivité*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

- L'application f est injective ssi $\ker(f) = \{0\}$.
- L'application f est surjective ssi $\text{Im}(f) = F$.

Exercice 14 Étudier l'injectivité et la surjectivité des applications suivantes :

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} y - z \\ x + 2y - z \\ 2x + y + z \\ x + 2y + z \end{pmatrix} \end{cases} \quad v : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} y - z \\ x + 2y - z \\ 2x + y + z \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] & \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto (P(1), P(2), \dots, P(n+1)) \end{cases}$$

Exercice 15 Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Montrer :

1. $\ker(u) \subset \ker(v \circ u)$ et $\text{Im}(v \circ u) \subset \text{Im}(v)$.
2. $v \circ u = 0$ si et seulement si $\text{Im}(u) \subset \ker(v)$.

2.2 Détermination d'une application linéaire par les images d'une base

Théorème Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $(e_i)_{i \in I}$ une base de E et $(f_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F . Alors

- il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I, u(e_i) = f_i$.
- De plus u est injective ssi
- u est surjective ssi
- u est bijective ssi

Corollaire 2

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de **même dimension finie** et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors
 u est injective ssi u est surjective ssi u est bijective.

Exercice 16 L'application $v : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \rightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ P & \mapsto P - P' \end{cases}$ est-elle un automorphisme ?

2.3 Détermination d'une application linéaire par des restrictions

Théorème *Détermination d'une application linéaire par des restrictions*

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et E_1, E_2 des sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.

Soient $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ 2 applications linéaires.

Alors

Projecteurs et symétries :

Définition 14 *Projecteur et symétrie*

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

$$i.e. \quad \forall x \in E, \quad \exists!(x_F, x_G) \in F \times G \quad \text{tel que} \quad x = x_F + x_G.$$

- On appelle projection de E sur F parallèlement à G l'application linéaire définie par

$$\begin{cases} p_F = \\ p_G = \end{cases}$$

$$\text{Concrètement } p : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x_F + x_G & \mapsto \end{cases}$$

- On appelle symétrie de E par rapport à F parallèlement à G l'application linéaire définie

$$\text{par } \begin{cases} s_F = \\ s_G = \end{cases}$$

$$\text{Concrètement } s : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ x_F + x_G & \mapsto \end{cases}$$

Proposition *Caractérisation d'un projecteur / d'une symétrie*

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Si $u \circ u = u$ alors u est
-
- Si $u \circ u = Id_E$ alors u est
-

Exercice 17 Dans l'espace vectoriel des fonctions réelles $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère l'application linéaire

$$\varphi : \begin{cases} E & \rightarrow E \\ f & \mapsto x \mapsto f(-x) \end{cases}.$$

Montrer que s est une symétrie dont vous donnerez les espaces caractéristiques.

Que peut-on en déduire ?

Remarque Si $E = \bigoplus_{i=1}^p E_i$ alors un vecteur $x \in E$ se décompose de manière unique en $x = x_1 + \cdots + x_p$

avec $x_i \in E_i$. L'application $x \mapsto x_i$ est alors la projection sur E_i dans la décomposition $E = \bigoplus_{j=1}^p E_j$ (i.e. parallèlement à $\bigoplus_{j \neq i} E_j$).

2.4 Rang d'une application linéaire

Définition 15 (*Rang*)

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, l'application u est de rang fini si $Im(u)$ est finie et alors

$$rg(u) = \dim(Im(u)).$$

Proposition (*à savoir redémontrer*)

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$ et $w \in \mathcal{L}(F, G)$ des applications de rangs finis. Alors

- L'application $u + v$ est de rang fini et $rg(u + v) \dots \dots \dots$
- L'application $w \circ u$ est de rang fini et $rg(w \circ u) \dots \dots \dots$
- Si u est un isomorphisme alors $rg(w \circ u) = \dots \dots \dots$
- Si w est un isomorphisme alors $rg(w \circ u) = \dots \dots \dots$

Preuve

Théorème du rang

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$ alors

Exercice 18 On note φ l'application linéaire $\varphi : \begin{cases} \mathbb{C}_n[X] & \rightarrow \mathbb{C}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto P' - P'' \end{cases}$.

Montrer que φ est bien définie et donner le noyau et l'image de cette application.

Exercice 19 Déterminer le noyau et l'image de $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + y - z \\ x - 2y + 2z \\ -2x + y - z \end{pmatrix}$.

2.5 Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Définition 16 forme linéaire / hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie.

- Une forme linéaire de E est une application
- Un hyperplan H de E est

Proposition définitions équivalentes d'un hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et H un sous-espace vectoriel de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- H est un hyperplan de E
- $\dim(H) = n - 1$
- Il existe une droite vectorielle D telle que $E = D \oplus H$.

Exemples

- Dans $\mathbb{R}^2$ les hyperplans sont
- Dans $\mathbb{R}^3$ les hyperplans sont
- $H_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + 2y - t = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$ car
- $H_2 = \{P \in \mathbb{R}_4[X] : P(1) = 0\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_4[X]$ car
- $H_3 = \left\{P \in \mathbb{R}_n[X] : \int_0^1 P = 0\right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}_n[X]$ car

3 Matrices et endomorphismes

3.1 L'algèbre des matrices

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'espace des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

C'est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel dont une base est

On rappelle qu'on a une multiplication « naturelle » :
$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{M}_{n,p} \times \mathcal{M}_{p,q} & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,q} \\ (A, B) & \longmapsto AB = C \end{array} \right.$$

avec $c_{i,j} = \dots\dots\dots$

On se rappelle que la multiplication AB est possible si et seulement si $\dots\dots\dots$
 $\dots\dots\dots$

Exemple Calculer le produit matriciel entre $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3.2 Matrice d'une application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives p et n .

Soient $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E et F respectivement.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, si $1 \leq j \leq p$ alors le vecteur $u(e_j)$ s'écrit de manière unique $\sum_{i=1}^n a_{ij} f_i$.

On appelle **matrice de u respectivement aux bases $\mathcal{E}, \mathcal{F}$** la matrice

Exercice 20 Donner la matrice de l'application $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \rightarrow \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto (X^2 + 1)P'' + 2XP' - P \end{cases}$ dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.

Théorème Avec les notations précédentes

- l'application $\varphi_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} : \begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) \end{cases}$ est un isomorphisme.
- Si $x \in E$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{E}}(x) = \dots\dots\dots$

3.3 Composition et produit

Proposition Composition et produit

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives p, n et q .

Soient $\mathcal{E}, \mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ des bases respectives de E, F et G .

Alors $\text{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(v \circ u) =$

3.4 Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On identifie $\mathbb{K}^n$ à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^p$ à $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

On appelle **application linéaire canoniquement associée à A** l'application a de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice relativement aux bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est A .

C'est-à-dire que $a : \begin{cases} \mathbb{K}^p & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ X & \longmapsto AX \end{cases}$.

On définit ainsi

- $\ker A (= \ker a) = \{X \in \mathbb{K}^p : AX = 0\}$
- $ImA (= Ima) = \{AX : X \in \mathbb{K}^p\} = \text{sev engendré par les colonnes de } A.$
- $rg(A) (= rg(a)) = \dim ImA = \text{rang de la famille des colonnes de } A \text{ etc}$

Bilan : une application linéaire en dimension finie peut être vu comme une matrice et réciproquement. Il est important de savoir passer de l'un à l'autre : passer du point de vue géométrique au point de vue matriciel et réciproquement.

3.5 Changement de bases

3.5.1 Changement de base pour les vecteurs

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E .

Soit x un vecteur de E alors x s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = \sum_{j=1}^n x_j e_j & x_j \in \mathbb{K} \\ x = \sum_{j=1}^n y_j f_j & y_j \in \mathbb{K} \end{array} \right.$$

De même chaque f_j s'écrit $f_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$. Ainsi

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^n y_j \left(\sum_{i=1}^n p_{ij} e_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n p_{ij} y_j \right) e_i \end{aligned}$$

et donc par unicité des coefficients dans la base $\mathcal{E}$ on a $x_i = \sum_{j=1}^n p_{ij} y_j$.

Posons $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ alors si on note $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ la matrice $(p_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ on a

$$X = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} Y \quad \text{c'est-à-dire que} \quad Mat_{\mathcal{E}}(x) = P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} Mat_{\mathcal{F}}(x).$$

Définition 17 Matrice de passage

Avec les mêmes notations que précédemment, la **matrice de passage** de $\mathcal{E}$ à $\mathcal{F}$, notée $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, est la matrice représentant $\mathcal{F}$ (la nouvelle base) dans $\mathcal{E}$ (l'ancienne base).

C'est donc la matrice $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = Mat_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(Id)$.

Remarque Une matrice de passage $P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ est inversible et son inverse est la matrice de passage de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{B} : (P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}})^{-1} = P_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$.

3.5.2 Changement de base pour les applications linéaires

Soient E, F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies.

Soient $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E et $\mathcal{F}, \mathcal{F}'$ deux bases de F .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, on souhaite relier la matrice $Mat_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$ et la matrice $Mat_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(u)$.

Proposition *Changement de base*

Avec les notations précédentes on a

Preuve

Proposition *Changement de base pour un endomorphisme*

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{E}, \mathcal{E}'$ deux bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On a alors

Exercice 21 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ on considère les $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0 \right\}$ et

$$G = Vect \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

1. Donner une base de F et une base de G .
2. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ et donner une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à cette décomposition.
3. Soit p le projecteur de E sur F parallèlement à G . Donner $Mat_{\mathcal{B}}(p)$.
4. En déduire la matrice de p dans la base canonique $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ et finalement une expression de

$$p : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto ?$$

3.6 Matrices semblables

Définition 18 *matrices semblables*

Soient M et M' deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Les matrices M et M' sont dites **semblables** si

Interprétation vectorielle :

Les matrices M et M' sont semblables signifie que

.....

Exercice 22 Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^{n-1} \neq 0$ et $M^n = 0$.

Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & 0 & & \\ & 1 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4 Matrices par blocs et interprétation vectorielle

4.1 Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme

Définition 19 *sous-espace stable*

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, V un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

L'ensemble V est dit stable par u si

Si c'est le cas alors on peut définir une nouvelle application nommée **endomorphisme induit par u sur V** : c'est l'application $u|_V^V \in \mathcal{L}(V)$ définie par

Exemples

- Les espaces $\ker u$ et $\text{Im } u$ sont stables par u . En effet :
- Si $x \in E$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $V_{u,x} = \text{Vect} (u^k(x) : k \in \mathbb{N})$ est un sous-espace vectoriel stable par u et qui contient x : c'est le plus petit sous-espace possédant ces propriétés.

Exercice 23 Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, montrer que $rg(u) = rg(v \circ u) + \dim(Imu \cap \ker v)$.

Proposition *stabilité et commutation*
 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
 Si u et v commutent (i.e. $u \circ v = v \circ u$) alors

Preuve

Exercice 24 Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$ commutant avec tout endomorphisme de E .

- Montrer que u stabilise toute droite de E .
- En déduire que u est une homothétie.

4.2 Matrices par bloc

Avec les matrices $A \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{M}_{q,s}(\mathbb{K})$ on définit une nouvelle matrice

Les matrices A, B, C, D sont appelés **blocs** de M .

Interprétation vectorielle :

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $M = Mat_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u)$

alors $A =$

Proposition *Combinaison linéaire de matrices par blocs*
 Soient $A \in \dots\dots\dots$, $B \in \dots\dots\dots$, $C \in \dots\dots\dots$, $D \in \dots\dots\dots$, $E \in \dots\dots\dots$,
 $F \in \dots\dots\dots$, $G \in \dots\dots\dots$, $H \in \dots\dots\dots$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} =$$

Proposition *Transposée d'une matrice par blocs*

Soient $A \in \dots\dots\dots$, $B \in \dots\dots\dots$, $C \in \dots\dots\dots$, $D \in \dots\dots\dots$, alors on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^\top =$$

Proposition *Produit par blocs*

Soient $A \in \dots\dots\dots$, $B \in \dots\dots\dots$, $C \in \dots\dots\dots$, $D \in \dots\dots\dots$, $E \in \dots\dots\dots$,
 $F \in \dots\dots\dots$, $G \in \dots\dots\dots$, $H \in \dots\dots\dots$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} =$$

Exercice 25 *(Résultat à connaître)*

Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on pose $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+p}(\mathbb{K})$.

Donner une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de M et calculer son inverse.

Matrices triangulaires par blocs :

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **triangulaire par blocs** si M s'écrit sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $p + q = n$.

Interprétation vectorielle :

Soient E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si $Mat_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ alors
.....

Réciproquement

Proposition *Triangulaire par blocs / Stabilité*

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Il y a équivalence entre les propriétés suivantes :

- le sous-espace F est
- la matrice de u dans une base adaptée à F est de la forme

Matrices diagonales par blocs :

Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonale par blocs** si M s'écrit sous la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ et $p + q = n$.

Interprétation vectorielle :

Soient E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si $Mat_{\mathcal{E}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_q(\mathbb{K})$ alors

Exemple Soit s une symétrie de E par rapport à F parallèlement à G alors dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ la matrice de p est diagonale par blocs.

4.3 Matrices triangulaires

Une matrice carrée $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est dite **triangulaire supérieure** si

On note $T_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.

L'espace $T_n^+(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension

Interprétation vectorielle :

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$

alors $Mat_{\mathcal{E}}(u) \in T_n^+(\mathbb{K}) \iff$

Remarques

- On a déjà vu dans le cours qu'une matrice nilpotente ($M^n = 0$) est semblable à une matrice triangulaire supérieure.
- Si $T \in T_n^+(\mathbb{K}) \cap GL_n(\mathbb{K})$ alors $T^{-1} \in T_n^+(\mathbb{K})$.

5 Polynômes de matrices carrées / polynômes d'endomorphismes

5.1 Définitions

Avec une matrice carrée $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit

- ses puissances successives par récurrence :
$$\begin{cases} M^0 = I_n \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad M^{k+1} = M \times M^k = M^k \times M \end{cases}$$
- si $a_0, a_1, \dots, a_p$ sont des scalaires alors on définit la matrice

$$a_0 I_n + a_1 M + \dots + a_p M^p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

qui est la matrice $P(M)$ avec $P = \dots\dots\dots$

On parle d'expression polynomiale en M .

Attention : si $P = 1 + X + X^2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $P(A) = \dots\dots\dots$

Avec un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, on définit

- ses puissances successives par récurrence :
$$\begin{cases} u^0 = Id_E \\ \forall k \in \mathbb{N}, \quad u^{k+1} = u \circ u^k = u^k \circ u \end{cases}$$
- si $a_0, a_1, \dots, a_p$ sont des scalaires alors on définit l'endomorphisme

$$a_0 Id_E + a_1 u + \dots + a_p u^p \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$$

qui est la matrice $P(u)$ avec $P = \dots\dots\dots$

On parle d'expression polynomiale en u .

Attention : si $P = 1 + X + X^2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ alors $P(u) = \dots\dots\dots$

Remarques

- Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors $(P + \lambda Q)(A) = \dots\dots\dots$
- Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ alors A et $P(A)$ $\dots\dots\dots$

Proposition

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$, $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$.

Nous avons

- $(PQ)(u) = \dots\dots\dots (PQ)(M) = \dots\dots\dots$
- Les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ $\dots\dots\dots$
- Les matrices $P(M)$ et $Q(M)$ $\dots\dots\dots$

Corollaire 3

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Alors $\ker(P(u))$ est

Exemples Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(E)$,

1. Développer $(A - I_n)(A - 2I_n)$. $(A - I_n)(A - 2I_n) = \dots\dots\dots$

2. Factoriser $u^2 - 5u + 6Id_E$.

Exercice 26 On considère la matrice $A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ et on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$

canoniquement associé à A .

- 1) Quelle inclusion a-t-on entre $\ker(A - I_3)$ et $\ker((A - I_3)^2)$?
- 2) Déterminer une base $\mathcal{B}$ de $\ker((A - I_3)^2)$ adaptée à $\ker(A - I_3)$.
- 3) En complétant la famille $\mathcal{B}$ en une base $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$, donner l'allure de la matrice $Mat_{\mathcal{F}}(u)$.

5.2 Polynôme annulateur

Définition 20 Polynôme annulateur

- Soit M une matrice carrée, on appelle polynôme annulateur de M tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant
.....
- Soit u un endomorphisme, on appelle polynôme annulateur de u tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant
.....

Attention :

- Pour des polynômes on a $P(X)Q(X) = 0 \iff$
- Pour des matrices ce résultat est

On peut avoir $P(A) \neq 0$, $Q(A) \neq 0$ et $P(A)Q(A) = 0$.

Par exemple, si A est la matrice d'un projecteur non trivial ($A \neq 0$ et $A \neq I_n$) alors

- Pour des endomorphismes ce résultat est

Proposition *Existence d'un polynôme annulateur*

- Soit M une matrice carrée, alors il existe un polynôme annulateur non nul de M .
- Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, alors il existe un polynôme annulateur non nul de u .

Remarque Une matrice carrée M (resp. un endomorphisme u) possède une infinité de polynômes annulateurs.

En effet,

Ainsi on ne dira jamais LE polynôme annulateur de M mais UN polynôme annulateur de M .

Proposition *Tout va bien*

- Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables (i.e. $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$) et Q un polynôme.

Si $Q(A) = 0$ alors

- Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base de E .

Alors pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$,

Donc Q **est un polynôme annulateur de** u ssi

.....

Lemme Soient A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ semblables i.e. $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $A = P^{-1}BP$ et Q un polynôme.

Alors $Q(A) =$

Preuve

5.2.1 Application 1 : Inversibilité

Exercice 27 (Trouver une matrice inverse rapidement)

Soit A une matrice carrée telle que $A^2 - 5A - 2I_n = 0$.

Montrer que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 28 Soient a et b des réels fixés. Déterminer lorsque c'est possible, l'inverse de

$$M = \begin{pmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 29 (Montrer qu'une matrice n'est pas inversible)

Étudier l'inversibilité de $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^5 - A = 0$ et $A^4 \neq I_3$.

5.2.2 Application 2 : Puissances n -ième

Exercice 30 Soit A une matrice carrée telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0$.

Calculer les puissances k -ième de A en fonction de A et I_n .

Méthode

Si $P(A) = 0$, pour calculer A^k il suffit de trouver le reste R de la division euclidienne

$$X^k = QP + R$$

car alors $A^k = R(A)$.

Pour trouver R , on regarde le degré de P et ses racines.

6 Trace d'une matrice carrée / trace d'un endomorphisme

Définition 21 trace d'une matrice carrée

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on appelle **trace** de A le nombre $Tr(A) = \dots\dots\dots$

Proposition

- La trace $Tr : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ est $\dots\dots\dots$
- Pour toutes matrices A, B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on a $Tr(AB) = \dots\dots\dots$

Preuve

Corollaire 4 /définition : trace d'un endomorphisme

Deux matrices semblables ont $\dots\dots\dots$

On peut donc définir la trace d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E)$ (avec E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie) de la manière suivante :

$$Tr(f) =$$

avec $\dots\dots\dots$

Remarque On a donc $\text{Tr}(f \circ g) = \dots\dots\dots$

Exercice 31 Donner la trace de l'endomorphisme de l'exercice 20.

Exercice 32 Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire telle que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, f(AB) = f(BA)$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \text{Tr}$.

7 Déterminants

7.1 Rappels

7.1.1 Définitions

Théorème Définition : Déterminant

Soit M une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on note $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes. Soit $C \in \mathbb{K}^n$.

Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- i. f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable ;
(i.e. $f(C_1, \dots, C_{i-1}, \alpha C_i + \beta C, C_{i+1}, \dots, C_n) = \alpha f(C_1, \dots, C_n) + \beta f(C_1, \dots, C_{i-1}, C, C_{i+1}, \dots, C_n)$)
- ii. f est antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable ;
(i.e. $f(C_1, \dots, C_i, \dots, C_j, \dots, C_n) = -f(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n)$)
- iii. $f(I_n) = 1$.

- Soit A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on appelle **déterminant** de A le nombre $f(A)$ et on le note $\det(A)$.
- Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B}$ une base de E et $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ n vecteurs de E . On appelle **déterminant** de la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ le nombre

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n))$$

- Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension n , $\mathcal{B}$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On appelle **déterminant** de l'endomorphisme u le nombre

$$\det_{\mathcal{B}}(u) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)).$$

On peut montrer que la définition de $\det_{\mathcal{B}}(u)$ est indépendante de la base $\mathcal{B}$ choisie.

7.1.2 Que détermine un déterminant ?

- Pour une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(M) \neq 0 \iff$
- Pour un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$, $\det(u) \neq 0 \iff$
- Pour une famille de n vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n ,
 $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \neq 0 \iff$

Plus précisément,

Théorème Déterminant / Volume

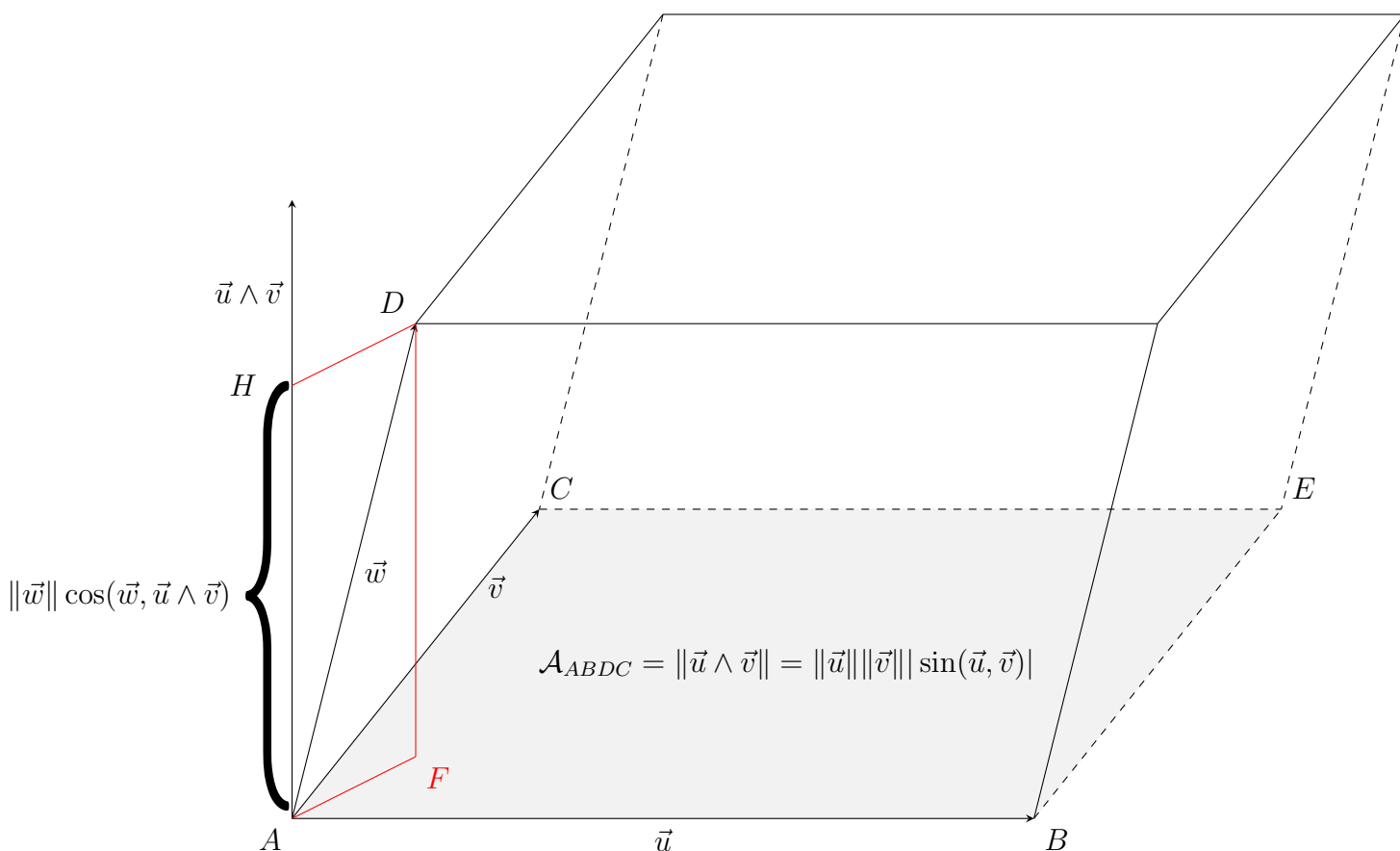
On note $\mathcal{C}_i$ la base canonique de $\mathbb{R}^i$.

- Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ alors

$$|\det_{\mathcal{C}_2}(\vec{u}, \vec{v})| \dots\dots\dots$$

- Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ alors

$$|\det_{\mathcal{C}_3}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})| \dots\dots\dots$$



Exercice 33 Déterminer le volume du parallélépipède engendré par les points $A(1; 0; -1)$, $B(1; 2; -1)$, $C(0; 2; -1)$ et $D(1; 2; 2)$. En déduire le volume du tétraèdre $ABCD$.

7.1.3 Propriétés

- Pour une matrice carrée A , $\det(A^\top) = \dots\dots\dots$
- $\det(C_1, \dots, C_j, \dots, C_i, \dots, C_n) = \dots\dots\dots$
Le déterminant est une forme antisymétrique.
- $\det(C_1, \dots, \alpha C_i, \dots, C_n) = \dots\dots\dots$
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\alpha A) = \dots\dots\dots$
Le déterminant n'est pas linéaire ! Il est multilinéaire par rapport aux colonnes de A .
- Si une matrice A admet deux colonnes (resp lignes) identiques alors $\dots\dots\dots$
Le déterminant est une forme alternée.
- Une colonne (resp. une ligne) est combinaison linéaire des autres colonnes (resp. lignes) ssi $\dots\dots\dots$
- Pour deux matrices carrées A, B de taille n , $\det(AB) = \dots\dots\dots$
- Pour une matrice carrée A , $\forall p \in \mathbb{N}$, $\det(A^p) = \dots\dots\dots$
- Pour une matrice carrée inversible A , $\det(A^{-1}) = \dots\dots\dots$
- Si A et B sont deux matrices semblables alors $\dots\dots\dots$

Exercice 34 Donner le lien entre $\det(C_1, C_2, C_3, C_4)$ et $\det(C_3, C_1, C_4, C_2)$?

Exercice 35 On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $M(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix}$. Pour quelles valeurs de x a-t-on $M(x) = 0$?

Exercice 36 Montrer que si A est une matrice antisymétrique d'ordre impair alors A n'est pas inversible.

Remarque Il n'existe pas de matrice réelle $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I_3$ car

Exercice 37 Calculer le déterminant de $f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto P(0)X^2 + P(X+1) - P(X) \end{cases}$.

7.1.4 Calcul de déterminant

Ce qui nous intéresse finalement c'est de savoir calculer un déterminant. Pour cela nous avons

- **La méthode du pivot de Gauss** : l'idée est de faire des opérations élémentaires $L_i \leftarrow L_i - \alpha L_j$, $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \frac{1}{\beta} L_i$ pour se ramener à une matrice simple pour laquelle on sait directement calculer le déterminant comme par exemple une matrice triangulaire.

Si une matrice T est triangulaire $\begin{pmatrix} t_{1,1} & \star & \cdots & \cdots & \star \\ 0 & t_{2,2} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & t_{n-1,n-1} & \star \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$ alors $\det(T) = \dots\dots\dots$

Lors des opérations élémentaires, le déterminant évolue ainsi :

Si $A \xrightarrow{L_i \leftarrow \tilde{L}_i + \alpha L_j} A'$ alors $\det(A) = \dots\dots\dots$

Si $A \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} A'$ alors $\det(A) = \dots\dots\dots$

Et si $A \xrightarrow{L_i \leftarrow \frac{1}{\beta} L_i} A'$ alors $\det(A) = \dots\dots\dots$

Exercice 38 Calculer les déterminant des matrices suivantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & j & j^2 \\ j^2 & 1 & j \\ j & j^2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } j = e^{\frac{2i\pi}{3}}.$$

- On peut aussi développer par rapport à une ligne ou par rapport à une colonne.
- Et bien sur, on peut mixer les deux méthodes.

Exercice 39 Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & 11 & 2 \\ 3 & 88 & 4 \\ 5 & 132 & 6 \end{pmatrix}$ et celui de

$$B = \begin{pmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}.$$

Exercice 40 (Matrice compagnon)

Pour $x \in \mathbb{K}$, calculer $P(x) = \det \begin{pmatrix} -x & 0 & 0 & -a \\ 1 & -x & 0 & -b \\ 0 & 1 & -x & -c \\ 0 & 0 & 1 & -x-d \end{pmatrix}$.

Exercice 41 Soient $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, et pour tout $n \geq 2$,

$$M_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les déterminant de M_2 et M_3 .
2. Donner une relation entre $\det(M_{n+2})$, $\det(M_{n+1})$ et $\det(M_n)$.
3. En déduire $\det(M_n)$ en fonction de n .

Résumé pour le calcul d'un déterminant

- (Cas finaux) pour $n = 1$ et $n = 2$ c'est direct
- (Cas intermédiaire) pour $n = 3$, on peut
 - ★ pivoter,
 - ★ développer par rapport à une rangée,
 - ★ voire utiliser la règle de Sarrus
- (Cas général)
 - ★ si une colonne ou une ligne a beaucoup de 0 : on développe
 - ★ sinon on pivote pour créer plein de 0
- À chaque étape, si on peut mettre en facteur, on le fait.

Exercice 42 Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, calculer le déterminant de $\begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$.

7.2 Le déterminant d'une matrice par blocs

Si une matrice M est triangulaire par blocs $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ avec A et C des matrices carrées alors

$\det(M) = \dots\dots\dots$

Exercice 43 Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On définit par blocs les matrices de $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} iI_n & I_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

Calculer le produit matriciel PMQ et en déduire $\det(M) = \det(A + iB) \det(A - iB)$.

Attention : Si $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, on n'a pas

Exercice 44 (classique)

Soit $n \geq 1$, A, B, C et D quatre matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\boxed{AC = CA}$ et on suppose $\boxed{A \text{ inversible.}}$

Montrer que $\text{Det} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \text{Det}(AD - CB)$.

Indication : Chercher une matrice blocs $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ * & A \end{pmatrix}$ pour que $\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ * & A \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ soit simple.

7.3 Polynômes d'interpolation de Lagrange / déterminant de Vandermonde

7.3.1 Polynômes interpolateurs de Lagrange

Vous connaissez le résultat suivant :

Si P est un polynôme de degré au plus n et que P s'annule $n + 1$ fois alors

De ceci on en déduit que si $a_1, \dots, a_{n+1}$ sont $n + 1$ points distincts de $\mathbb{K}$ et si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}_n[X]$ tels que $\forall k \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, $P(a_k) = Q(a_k)$ alors

En notant ψ l'application linéaire

$$\psi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \rightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_1), \dots, P(a_{n+1})) \end{cases} ,$$

nous venons juste d'exprimer

Ainsi si $a_1, \dots, a_{n+1}$ sont $n + 1$ points distincts de $\mathbb{K}$, alors l'application ψ est

Cette bijection, nous l'avons déjà bien intégrée : pour connaître un polynôme de degré n , il suffit de connaître sa valeur en $n + 1$ points !

Plus précisément, cette bijectivité nous dit que $\forall (b_1, \dots, b_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$, $\exists ! P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $\forall k \in \llbracket 1; n + 1 \rrbracket$, $P(a_k) = b_k$.

Mais concrètement, comment trouve-t-on P ?

Quel est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ vérifiant $P(0) = 4$, $P(1) = 2$, $P(2) = 3$ et $P(4) = 0$?

Définition 22 *polynômes interpolateurs de Lagrange*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_{n+1}$ $n + 1$ points **distincts** de $\mathbb{K}$. On définit alors $n + 1$ polynômes :

Ces polynômes sont appelés les polynômes interpolateurs de Lagrange (relativement aux $n + 1$ points donnés).

Remarques

- Pour tout $(k, i) \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket^2$, $L_k(a_i) =$

- En notant $\left(e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$ on a

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_{n+1}$ $n + 1$ points **distincts** de $\mathbb{K}$.

- La famille $(L_1, \dots, L_{n+1})$ est
- Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$,

Corollaire 5

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_{n+1}$ $n + 1$ points **distincts** de $\mathbb{K}$.

$$L_1 + L_2 + \dots + L_{n+1} =$$

7.3.2 Les matrices de Vandermonde

On appelle matrice de Vandermonde une matrice de la forme

$$V(a_1, \dots, a_{n+1}) =$$

avec $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ fixé.

Proposition *Déterminant de Vandermonde*
Soit $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ alors le déterminant de

$$V(a_1, \dots, a_{n+1}) =$$

est

$$\det(V(a_1, \dots, a_{n+1})) =$$

Preuve

Remarque

Déterminer la matrice de $\psi : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \rightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto (P(a_1), \dots, P(a_{n+1})) \end{cases}$ dans la base $(1, X, X^2, \dots, X^{n-1})$ de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ et la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Proposition *inversibilité d'une matrice de Vandermonde*
Soit $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ alors la matrice de Vandermonde $V(a_1, \dots, a_{n+1})$ est inversible
si et seulement si

Table des matières

1	Espaces vectoriels	1
1.1	Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels	1
1.2	Familles de vecteurs	3
1.2.1	Familles libres et liées	3
1.2.2	Familles génératrices et bases	4
1.3	Espaces vectoriels de dimensions finies	5
1.3.1	Définitions	5
1.3.2	Famille de vecteurs	6
1.3.3	Sous-espaces vectoriels	6
1.3.4	Produit de $\mathbb{K}$ -espace vectoriels	6
1.4	Somme / Somme directe / supplémentaires	7
1.4.1	Cas de deux sev	7
1.4.2	Cas d'un nombre finie quelconque de sev	9
2	Applications linéaires, étude vectorielle	12
2.1	Généralités	12
2.2	Détermination d'une application linéaire par les images d'une base	14
2.3	Détermination d'une application linéaire par des restrictions	15
2.4	Rang d'une application linéaire	16
2.5	Formes linéaires et hyperplans en dimension finie	17
3	Matrices et endomorphismes	18
3.1	L'algèbre des matrices	18
3.2	Matrice d'une application linéaire	19
3.3	Composition et produit	19
3.4	Application linéaire canoniquement associée à une matrice	19
3.5	Changement de bases	20
3.5.1	Changement de base pour les vecteurs	20
3.5.2	Changement de base pour les applications linéaires	21
3.6	Matrices semblables	22
4	Matrices par blocs et interprétation vectorielle	22
4.1	Sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme	22
4.2	Matrices par bloc	23
4.3	Matrices triangulaires	25
5	Polynômes de matrices carrées / polynômes d'endomorphismes	26
5.1	Définitions	26
5.2	Polynôme annulateur	27
5.2.1	Application 1 : Inversibilité	28
5.2.2	Application 2 : Puissances n -ième	29
6	Trace d'une matrice carrée / trace d'un endomorphisme	29
7	Déterminants	30
7.1	Rappels	30
7.1.1	Définitions	30
7.1.2	Que détermine un déterminant ?	31
7.1.3	Propriétés	32
7.1.4	Calcul de déterminant	33
7.2	Le déterminant d'une matrice par blocs	34
7.3	Polynômes d'interpolation de Lagrange / déterminant de Vandermonde	35
7.3.1	Polynômes interpolateurs de Lagrange	35
7.3.2	Les matrices de Vandermonde	37