

# Mécanique des fluides      Autour de la poussée d'Archimède

## Théorème d'Archimède

Étant donné un corps immobile entièrement immergé dans un fluide au repos, placé dans le champ de pesanteur. La **résultante des forces de pression** exercées sur ce corps par le fluide est une force verticale, dirigée vers le haut, égale au poids du fluide remplacé. Cette force est appelée *poussée d'Archimède*.

En analyse vectorielle, le théorème du gradient indique que

$$\iiint_{P \in \mathcal{V}} \overrightarrow{\text{grad}} G(P) d\tau_P = \oiint_{M \in \Sigma} G(M) \cdot d\vec{S}_M$$

La résultante des forces de pression sur la surface surface  $\Sigma$  délimitant le volume  $\mathcal{V}$  vaut donc

$$\vec{\Pi}_A = - \oiint_{M \in \Sigma} p(M) \cdot d\vec{S}_M = - \iiint_{M \in \mathcal{V}} \overrightarrow{\text{grad}} p(M) \cdot d\tau_M.$$

D'après la relation fondamentale de la statique des fluides  $\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} p + \mu \vec{g}$ , on en déduit

$$\vec{\Pi}_A = - \left( \iiint_{M \in \mathcal{V}} \mu(M) d\tau_M \right) \vec{g}$$

qui est bien opposé au poids du fluide de remplacement.

Dans le cas d'un liquide incompressible :

$$\vec{\Pi}_A = -\mu \mathcal{V} \vec{g}.$$

- Le corps doit être entièrement entouré de fluide pour que le théorème d'Archimède s'applique. Dans les deux cas suivant, le théorème d'Archimède ne s'applique pas :



- La poussée d'Archimède est due au caractère non uniforme de la pression dans le fluide : la pression augmente avec la profondeur; les forces pressantes s'exerçant à la base du solide, qui tendent à le pousser vers le haut, sont plus intenses que les forces pressantes s'exerçant sur le sommet du solide, qui tendent à le pousser vers le bas.

On peut en déduire une propriété importante :

La résultante des forces de pression exercées sur un solide entièrement immergé dans un fluide où la pression est uniforme est nulle.

- La pression au sein d'un gaz peut être considérée comme uniforme sur des hauteurs de quelques mètres. En particulier **on peut usuellement considérer la pression atmosphérique comme uniforme sur de telles distances.**

## Cas particuliers

### Fluides stratifiés

Dans le cas d'un corps immergé entre deux fluides superposés, il faut prendre en compte les poids des deux liquides remplacés :

$$\vec{\Pi}_A = -(\mu_1 V_1 + \mu_2 V_2) \vec{g}.$$

### Corps flottant

Un corps flottant ne semble pas complètement immergé... Il faut le considérer comme un corps immergé entre deux fluides superposés : le liquide et l'atmosphère qui le surplombe. La poussée d'Archimède serait donnée par

$$\vec{\Pi}_A = -(\mu_\ell V_\ell + \mu_a V_a) \vec{g}.$$

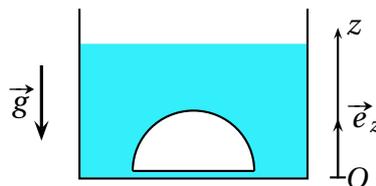
Comme  $\mu_\ell \ll \mu_a$ , on peut négliger les forces de pression exercée par l'atmosphère devant celles exercées par le liquide, d'où le résultat usuel

$$\vec{\Pi}_A = -\mu_\ell V_\ell \vec{g}.$$

### Calculer la résultante des forces de pression

On considère une demi-sphère de rayon  $R$  posée sur le fond d'un récipient rempli d'une hauteur  $h$  de liquide. On demande la résultante des forces de pression exercée par le liquide sur la demi-sphère.

Un calcul direct serait fastidieux. Une astuce classique consiste à considérer que la demi-sphère est entièrement immergée, en imaginant une fine couche de liquide entre sa base et le fond du récipient<sup>1</sup> :



La résultante des forces de pression s'exerçant sur le solide est

$$\vec{\Pi}_A = \vec{F}_b + \vec{F}$$

où  $\vec{F}_b$  est la résultante des forces de pression s'exerçant sur la base du solide, et  $\vec{F}$  la résultante de ces forces sur la partie sphérique (c'est ce terme que l'on cherche).

La pression au fond du récipient est  $P(0) = P_0 + \mu gh$ . On en déduit

$$\vec{F}_b = P(0)\pi R^2 \vec{e}_z = [P_0 + \mu gh]\pi R^2 \vec{e}_z.$$

Le solide étant maintenant complètement immergé, le théorème d'Archimède s'applique, et

$$\vec{\Pi}_A = \frac{2}{3}\pi R^3 \mu g \vec{e}_z.$$

On a donc

$$\vec{F} = \vec{\Pi}_A - \vec{F}_b = \left(\frac{2}{3}\pi R^3 \mu g - [P_0 + \mu gh]\pi R^2\right) \vec{e}_z = -P_0\pi R^2 \vec{e}_z + \pi R^2 \mu g \left(\frac{2}{3}R - h\right) \vec{e}_z.$$

1. Cela revient à modifier très faiblement la position du solide; la pression dans le fluide est inchangée sur ce faible déplacement vertical.