

Mathématiques et physique

Formulaire d'analyse vectorielle

On donne un champ scalaire $G(M, t)$ et un champ vectoriel $\vec{A}(M, t)$.

Opérateur gradient

Coordonnées cartésiennes : $\vec{\text{grad}} G = \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_{y,z} \vec{e}_x + \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_{x,z} \vec{e}_y + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{x,y} \vec{e}_z$

Coordonnées cylindriques : $\vec{\text{grad}} G = \left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)_{\theta,z} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial G}{\partial \theta}\right)_{r,z} \vec{e}_\theta + \left(\frac{\partial G}{\partial z}\right)_{r,\theta} \vec{e}_z$

Coordonnées sphériques : $\vec{\text{grad}} G = \left(\frac{\partial G}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial G}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial G}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta} \vec{e}_\varphi$

Opérateur divergence

Coordonnées cartésiennes : $\text{div } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial y}\right)_{x,z} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)_{x,y}$

Coordonnées cylindriques : $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_r)}{\partial r}\right)_{\theta,z} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta}\right)_{r,z} + \left(\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)_{r,\theta}$

Coordonnées sphériques : $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r}\right)_{\theta,\varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta}\right)_{r,\varphi} + \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right)_{r,\theta}$

Opérateur rotationnel

Coordonnées cartésiennes : $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \vec{e}_z$

Coordonnées cylindriques : $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \vec{e}_z$

Coordonnées sphériques : $\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial(\sin \theta A_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r}\right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \vec{e}_\varphi$

Laplacien

Coordonnées cartésiennes : $\Delta G = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$

Coordonnées cylindriques : $\Delta G = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial G}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}$

Coordonnées sphériques : $\Delta G = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2}$
 $= \frac{1}{r} \frac{\partial^2(rG)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 G}{\partial \varphi^2}$

Soient $a = a(M, t)$ et $b = b(M, t)$ deux champs scalaires, et $\vec{A} = \vec{A}(M, t)$ et $\vec{B} = \vec{B}(M, t)$ deux champs vectoriels. On a les relations :

- $\vec{\text{grad}}(ab) = a \vec{\text{grad}} b + b \vec{\text{grad}} a$
- $\text{div}(a \vec{A}) = a \text{div } \vec{A} + (\vec{\text{grad}} a) \cdot \vec{A}$
- $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B}$
- $\vec{\text{rot}}(a \vec{A}) = a \vec{\text{rot}} \vec{A} + (\vec{\text{grad}} a) \wedge \vec{A}$
- $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{grad}} a) = \vec{0}$

- $\text{div}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = 0$
- $\vec{\text{rot}}(\vec{\text{rot}} \vec{A}) = \vec{\text{grad}}(\text{div } \vec{A}) - \Delta \vec{A}$
- $\text{div } \vec{B} = 0 \iff \exists \vec{A}, \vec{B} = \vec{\text{rot}} \vec{A}$
- $\vec{\text{rot}} \vec{A} = 0 \iff \exists a, \vec{A} = \vec{\text{grad}} a$

Théorème d'Ostrogradski

Soit un champ vectoriel $\vec{A}(M, t)$ défini en tout point d'un volume \mathcal{V} délimité par une surface Σ :

$$\oiint_{P \in \Sigma} \vec{A}(P, t) \cdot d\vec{S}_P = \iiint_{M \in \mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{A}(M, t) d\tau_M.$$

Conséquence :

Tout champ à divergence identiquement nulle est à flux conservatif, et réciproquement :

$$\oiint_{P \in \Sigma} \vec{A}(P, t) \cdot d\vec{S}_P = 0, \forall \Sigma \iff \operatorname{div} \vec{A}(M, t) = 0 \forall M.$$

Théorème de Stokes

Soit un champ vectoriel $\vec{A}(M, t)$ défini en tout point d'une surface Σ s'appuyant sur un contour orienté Γ :

$$\oint_{P \in \Gamma} \vec{A}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = \iint_{M \in \Sigma} \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}(M, t) d\vec{S}_M.$$

Conséquence :

Tout champ à rotationnel identiquement nul est à circulation conservative, et réciproquement :

$$\oint_{P \in \Gamma} \vec{A}(P, t) \cdot d\vec{\ell}_P = 0, \forall \Gamma \iff \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}(M, t) = \vec{0} \forall M.$$

Champ vectoriel à flux conservatif

La divergence d'un rotationnel est identiquement nulle : $\operatorname{div}(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}(M, t)) = 0$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ soit à flux conservatif est qu'il soit un champ de rotationnel :

$$\operatorname{div} \vec{A}(M, t) = 0; \forall M \iff \exists \vec{R}(M, t), \vec{A}(M, t) = \overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{R}(M, t)$$

Champ vectoriel à circulation conservative

Le rotationnel d'un gradient est identiquement nul : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}(\overrightarrow{\operatorname{grad}} G(M, t)) = \vec{0}$.

Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un champ soit à circulation conservatif est qu'il soit un champ de gradient :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{A}(M, t) = \vec{0}; \forall M \iff \exists G(M, t), \vec{A}(M, t) = \overrightarrow{\operatorname{grad}} G(M, t)$$