

Intégrales sur un segment :

★ **Exercice 1** α désigne un réel strictement positif.

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(\alpha) = 1 + 2^\alpha + \dots + n^\alpha$.

1. Justifier l'existence puis calculer $\int_0^1 x^\alpha dx$.
2. En déduire, à l'aide des sommes de Riemann, un équivalent simple de $S_n(\alpha)$ pour n tendant vers l'infini.

Exercice 2

1. Calculer $\int_0^1 \ln(1+x) dx$.
2. Déterminer la limite de $\left(\frac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}$.

Exercice 3 Pour p et q dans $\mathbb{N}$, on pose $I_{p,q} = \int_{-1}^1 (1-t)^p(1+t)^q dt$.

1. Préciser $I_{0,n}$ (pour $n \in \mathbb{N}$).
2. Pour $p \leq 1$, exprimer $I_{p,q}$ en fonction de $I_{p-1,q+1}$.
3. En déduire $I_{p,q}$ en fonction de p et q et en particulier $I_{n,n}$ en fonction de n .

Exercice 4 *Le changement à connaître*

1. Soit $x \in [0; \pi[$. On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. Retrouver les formules : $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$
2. Calculer $J_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{5-4\cos(x)} dx$ en utilisant le changement de variable $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. En déduire simplement la valeur de $J_1 = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{5-4\cos(x)} dx$.

Exercice 5 CCP PC Calculer $\int_0^1 \arcsin(\sqrt{t}) dt$.

★ **Exercice 6** Soit $G(x) = \int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{1+t^2} dt$.

1. Ensemble de définition de G ?
2. Montrer que G est de classe C^1 sur son ensemble de définition.
3. Calculer G' . Conclusion ?

• **Exercice 7** Mines Télécom 2021

Soit g une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et de limite nulle en $-\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout

$x \in \mathbb{R}$, on note $f_n(x) = \int_0^x g(nt^2) dt - \int_x^1 g(-nt^2) dt$.

1. Montrer que f_n est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et que g est strictement positive.

2. Montrer que $f_n(x) = 0$ admet une unique solution. On note x_n cette solution.
3. Étudier la monotonie de la suite (x_n) .
4. Montrer que quelque soit $x \in \mathbb{R}$, $\int_x^1 g(-nt^2)dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.
5. En déduire la limite de la suite (x_n) .

Exercice 8 Comparer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 n^2 x e^{-nx} dx$ et $\int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 x e^{-nx} \right) dx$.

Intégrales généralisées :

★ **Exercice 9** Les intégrales suivantes sont-elles convergentes ?

$$\begin{array}{llll}
 a) \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \arctan(x)}{x^6 + x^3 + 1} dx & b) \int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1} dx & c) \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x-1}} & d) \int_0^1 \frac{\ln t}{1-t} dt \\
 e) \int_e^{+\infty} \frac{dx}{\ln x} & f) \int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2} dt & g) \int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}} dt & h) \int_0^1 \frac{\ln t}{t} dt \\
 i) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x + e^x} dx & j) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx & k) \int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t^2} dt & \text{avec } \alpha \in \mathbb{R}.
 \end{array}$$

• **Exercice 10** Montrer que $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x + x^2} dx$ existe.

Déterminer la valeur de I (on utilisera une décomposition en éléments simples).

• **Exercice 11** Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x + x^2} dx$ existe.

Déterminer la valeur de I (on pourra commencer par poser $u = x + 1/2$).

Exercice 12 Montrer l'existence de $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} dx$ et calculer sa valeur.

• **Exercice 13** *Culture : intégrales de BERTRAND (savoir refaire comme du cours)*

Discuter, selon $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[^2$, l'intégrabilité sur $[2, +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha (\ln(x))^\beta}$

• **Exercice 14** **Fonction Gamma (à savoir refaire sans hésitation)**

Soit Γ la fonction définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction Γ .
2. Montrer que pour tout $x > 0$: $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. Calculer $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15 Mines 2023

On pose pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{t^2 - 1}{(1 + t^2)\sqrt{1 + t^4}}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

1. Donner le développement limité à l'ordre 3 de F en 0.
2. Calculer, si existence, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) dt$.

Exercice 16

1. Montrer que pour $a > 0$, l'intégrale $F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2 + t^2} dt$ existe.
2. Montrer que $F(1) = 0$ en utilisant $t = 1/u$.
3. En déduire $F(a)$ en fonction de a .

Exercice 17 Intégrale dite de POISSON (classique) Soit $I = \int_0^{\pi/2} \ln(\sin(x)) dx$.

1. Montrer que l'intégrale I converge.
2. En déduire l'existence et la valeur (en fonction de I) des intégrales :

$$J = \int_0^{\pi/2} \ln(\cos(t)) dt \quad \text{et} \quad K = \int_{\pi/2}^{\pi} \ln(\sin(u)) du.$$

3. En déduire la valeur de I (on envisagera $I + J$).

Exercice 18

1. Étudier le domaine de définition et la monotonie de $f(x) = \int_1^{+\infty} \frac{t^{-x}}{1+t} dt$.
2. Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) + f(x+1) = \frac{1}{x}$.
3. Donner la limite puis un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$ et en 0^+ .
4. Calculer $f(1)$ et donner l'allure de la courbe.

Exercice 19 CCP PC 2008

Existence et calcul de $I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$. En déduire la valeur de $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx$.

Exercice 20 CCINP 2023 On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt$.

1. Montrer que l'intégrale I_n converge pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}$.
3. On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $J_n = nI_n$.
Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1} .
4. Calculer J_1 . En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $J_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

★ **Exercice 21** CCINP 2024-2025 On considère lorsque c'est possible $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que f est définie et de classe C^1 sur $]0; +\infty[$. Calculer f' .
2. a. Montrer que $\forall x > 0$, $f(x) \leq \frac{e^{-x}}{x}$.
b. Montrer que $\forall x > 0$, $f(x) = -e^{-x} \ln(x) + \int_x^{+\infty} e^{-t} \ln(t) dt$.

c. Montrer que f est intégrable sur $]0; +\infty[$.

3. Calculer $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

★ **Exercice 22** On envisage, sous réserve d'existence, $F(\alpha) = \int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin t}{t^{\alpha}} dt$.

Montrer que l'intégrale définissant $F(\alpha)$ est absolument convergente pour $\alpha > 1$ et que pour $\alpha > 0$, $F(\alpha)$ existe.

• **Exercice 23** Mines-Télécom 2024

1. Montrer que $x \mapsto \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x}$ est intégrable sur $]0; 1]$.
2. Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du$ est convergente.
3. Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax) - \cos(bx)}{x} dx$ est convergente et la calculer.

Exercice 24 Centrale 2025

Soit f une fonction de classe C^1 et intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $L(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\lambda t) dt$.

1. Justifier l'existence de $L(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $L(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} 0$.

Indication : s'intéresser dans un premier temps à $\int_{-a}^a f(t) \sin(\lambda t) dt$ avec $a \in \mathbb{R}_+^$.*

3. Étudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ puis d'autres questions.

Exercice 25 CCINP 2023 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

1. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \int_a^b f(x) \sin(nx) dx$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$.
2. On considère $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $K_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{x} dx$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)} dx$.
 - a. Montrer que l'intégrale I est convergente.
 - b. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = I$.
 - c. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (J_n - K_n) = 0$.
 - d. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $J_{2p+1} = J_{2p-1}$.
 - e. En déduire la valeur de I .

• **Exercice 26** CCINP 2019 Soit $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2} dt$.

1. Montrer que I existe.
2. En linéarisant $\sin^3(t)$ montrer que $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{4} \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.
3. Montrer que $g : t \mapsto \frac{\sin(t) - t}{t^2}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.
4. En déduire la valeur de I .