Mathématiques et physique **La notation complexe**

Généralités sur les complexes

Un nombre complexe $\underline{z} \in \mathbf{C}$ peut s'écrire sous deux formes :

$$\underline{z} = x + \mathrm{i}y = z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \quad \text{avec } \mathrm{i}^2 = -1$$

partie réelle $x = \mathrm{Re}(\underline{z})$

module $z = |\underline{z}|$

partie imaginaire $y = \mathrm{Im}(\underline{z})$

argument $\varphi = \arg \underline{z}$

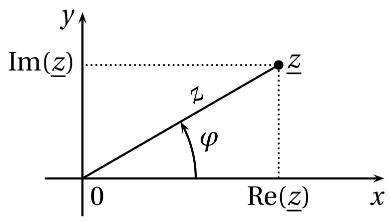
- x, y et φ sont des réels algébriques; z est un réel positif.
- On peut développer $\underline{z} = z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = z\cos\varphi + \mathrm{i}z\sin\varphi$.
- En électricité, pour éviter la confusion avec l'intensité, on note usuellement $\mathrm{j}^2 = -1$.

Lien entre les deux notations

$$x = z\cos\varphi \qquad z = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = z\sin\varphi \qquad \tan\varphi = y/x$$

Représentation géométrique :

- Le complexe $\underline{z}$ est l'**affixe** du point $M(x, y)$.



Quelques relations

Soient $\underline{z}_1 = z_1\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_1}$ et $\underline{z}_2 = z_2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_2}$ deux nombres complexes et $a \in \mathbf{R}$ un réel.

- $|\underline{z}_1 \times \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| \times |\underline{z}_2|$
- $\arg(\underline{z}_1\underline{z}_2) = \arg(\underline{z}_1) + \arg(\underline{z}_2)$
- $\left|\dfrac{1}{\underline{z}}\right| = \dfrac{1}{|\underline{z}|}$ et $\arg\left(\frac{1}{\underline{z}}\right) = -\arg(\underline{z})$.
- $|(\underline{z})^a| = |\underline{z}|^a$ et $\arg\left(\underline{z}^a\right) = n a \arg(\underline{z})$.

$$\underline{z} \in \mathbf{R} \iff \mathrm{Im}(\underline{z}) = 0 \iff \varphi = 0 \text{ ou } \varphi = \pi$$

- Si $\varphi = 0$ on a $\underline{z} = |\underline{z}| > 0$; si $\varphi = \pi$ on a $\underline{z} = -|\underline{z}| < 0$.

Soit $\underline{z} = a + \mathrm{i}b = z\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Le complexe conjugué associé est $\underline{z}^* = a - \mathrm{i}b = z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$. On a

$$\boxed{|\underline{z}^*| = |\underline{z}|} \quad \text{et} \quad \boxed{\arg\left(\underline{z}^*\right) = -\arg\left(\underline{z}\right)}.$$

On ne peut pas comparer deux complexes : l'écriture $\underline{z}_1 > \underline{z}_2$ n'a pas de sens.
On ne peut comparer que les modules des complexes : $|\underline{z}_1| > |\underline{z}_2|$ a un sens.

Notation complexe en régime harmonique

Soit $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$ un signal harmonique du temps [1].

amplitude $X > 0$

phase instantanée $\omega t + \varphi$

phase à l'origine φ

La notation complexe définit le **signal analytique** associé

$$\underline{x}(t) = X\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t + \varphi)}$$

le signal étant donné par $x(t) = \mathrm{Re}\big(\underline{x}(t)\big)$.

➤ Dans le plan complexe, le point M d'affixe $\underline{z}$ tourne à la vitesse angulaire ω autour de l'origine, à la distance X de cette dernière.

On définit l'**amplitude complexe** $\underline{X} = X\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$.

➤ L'amplitude complexe est **indépendante du temps**.

➤ On a $\underline{x}(t) = \underline{X}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$.

Dérivation et intégration

signal réel	**signal analytique**	**amplitude complexe**
$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$	$\underline{x}(t) = X\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t+\varphi)}$	$\underline{X} = X\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	$\mathrm{i}\omega\underline{x}(t)$	$\mathrm{i}\omega\underline{X}$
$\int x(t)\,\mathrm{d}t$	$\dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}\underline{x}(t)$	$\dfrac{1}{\mathrm{i}\omega}\underline{X}$

Condition d'utilisation de la notation complexe

L'amplitude complexe ne peut être utilisée qu'en présence de grandeurs harmoniques de même pulsation.

➤ Soient $x_1(t) = X_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ et $x_2(t) = X_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ deux signaux de pulsations différentes.
Au signal $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ on peut associer le signal analytique $\underline{x}(t) = \underline{x}_1(t) + \underline{x}_2(t)$; en revanche, on ne peut associer d'amplitude complexe à $x(t)$ qui n'est pas harmonique.

La notation complexe ne peut s'utiliser qu'avec des expressions linéaires [2].

➤ À partir de la tension $u(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$ et de l'intensité $i(t) = I\cos(\omega t)$, l'expression de la puissance instantanée $p(t) = u(t)i(t)$ n'est pas linéaire.
On ne peut pas définir la puissance complexe $\underline{p}(t) = \underline{u}(t)\underline{i}(t)$ telle que $p(t) = \mathrm{Re}\Big(\underline{p}(t)\Big)$.

1. On considérera de la même façon un signal harmonique $y(x) = Y\cos(kx + \varphi)$.
2. Une expression faisant intervenir des produits de signaux n'est pas linéaire.