Mathématiques et physique — Équations différentielles

Rappels sur les **équations différentielles linéaires homogènes**[1] de base.
Les équations différentielles **homogènes** décrivent le **régime libre** d'un système.

Système du premier ordre

Équation différentielle	Solution générale
$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay(x) = 0$	$y(x) = A\,\mathrm{e}^{-ax}$

- La constante a a la même dimension que $1/x$.
- La constante A est déterminée par une condition particulière ; si $y(0)$ est donné, la solution s'écrit $\boxed{y(x) = y(0)\,\mathrm{e}^{-ax}}$; dans le cas général si $y(x_0)$ est donné, on obtient $y(x) = y(x_0)\,\mathrm{e}^{-a(x-x_0)}$.

Dans le cas d'une fonction du temps $y(t)$, on pose $\tau = 1/a$, où $\tau > 0$ est le **temps caractéristique** :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{y(t)}{\tau} = 0}\,.$$

Quelle que soit la condition initiale, on a $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$.

Système du second ordre

Équation différentielle	Les solutions dépendent de la nature des solutions de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$, donc du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$. On distingue trois types de solutions.
$a\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + cy(x) = 0$	$\Delta > 0$: deux racines réelles r_1 et r_2 $y(x) = A\,\mathrm{e}^{r_1 x} + B\,\mathrm{e}^{r_2 x}$
	$\Delta = 0$: une racine réelle double r_0 $y(x) = (A + Bx)\,\mathrm{e}^{r_0 x}$
	$\Delta < 0$: deux racines complexes conjuguées $r_1 = u + \mathrm{i}v$ et $r_2 = u - \mathrm{i}v$ $y(x) = \mathrm{e}^{ux}[A\cos(vx) + B\sin(vx)]$

- Les deux constantes A et B sont déterminées par deux conditions particulières, qui peuvent porter sur y ou ses dérivées en des points donnés.
- Dans le cas $\Delta < 0$, la solution peut être cherchée sous la forme $y(x) = A\,\mathrm{e}^{ux}\cos(vx + \varphi)$, où les deux constantes sont A et φ.
- Les constantes u et v ont la même dimension que $1/x$.

1. Une équation différentielle est dite homogène si son second membre est nul.

Formes canoniques en physique

Il existe plusieurs formes canoniques de l'équation différentielle linéaire du second ordre en physique. On considère une fonction du temps $y(t)$.

Forme canonique	Grandeurs caractéristiques
$\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}+\dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{dy}{dt}+\omega_0^2y(t)=0}$	pulsation propre : ω_0 facteur de qualité : Q sans dimension
$\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\sigma\omega_0\dfrac{dy}{dt}+\omega_0^2y(t)=0}$	pulsation propre : ω_0 facteur d'amortissement : σ sans dimension
$\boxed{\dfrac{d^2y}{dt^2}+2\lambda\dfrac{dy}{dt}+\omega_0^2y(t)=0}$	pulsation propre : ω_0 coefficient d'amortissement : λ avec $[\lambda]=T^{-1}$

Trois types de régimes sont possibles, selon le signe du discriminant Δ. Avec la forme canonique utilisant le coefficient d'amortissement λ, on a :

Nature du régime	Δ	Forme de la solution	Condition
Apériodique	$\Delta>0$	$y(t)=A\,e^{-(\lambda+\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t}+B\,e^{-(\lambda-\sqrt{\lambda^2-\omega_0^2})t}$	$\lambda>\omega_0$, ou $Q<1/2$, ou $\sigma>1$
Critique	$\Delta=0$	$y(t)=(A+Bt)\,e^{-\lambda t}$	$\lambda=\omega_0$, ou $Q=1/2$, ou $\sigma=1$
Pseudo-périodique	$\Delta<0$	$y(t)=e^{-\lambda t}\,[A\cos(\Omega t)+B\sin(\Omega t)]$	$\lambda<\omega_0$, ou $Q>1/2$, ou $\sigma<1$

Quel que soit le type de régime et quelles que soient les conditions initiales, on a (pour $\lambda>0$)

$$\lim_{t\to+\infty} y(t)=0\,.$$

Complément sur le régime pseudo-périodique

- La pseudo-pulsation est $\Omega=\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}=\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}=\sqrt{\omega_0^2-\omega_0\sigma}$.
- La pseudo-période, période des termes sinusoïdaux, est $T=2\pi/\Omega$.
- Le système est dit faiblement amorti si $Q\gg1$ (ou $\sigma\ll1$). On a alors $\Omega\approx\omega_0$. On montre que le nombre d'oscillations « visibles » est alors de l'ordre de Q.
- Si le coefficient du terme de dérivée première est négative, le terme exponentiel de la solution est croissant.

Cas particulier fondamental

Équation différentielle	Condition	Solution générale
$\dfrac{d^2y}{dx^2} + ay(x) = 0, \quad a \in \mathbf{R}$	$a = k^2 > 0$	$y(t) = A\cos(kx) + B\sin(kx)$
	$a = 0$	$y(t) = Ax + B$
	$a = -k^2 < 0$	$y(t) = A\,e^{kx} + B\,e^{-kx}$

- Le cas $a = k^2 > 0$ correspond à l'**oscillateur harmonique** :

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 y(x) = 0}\,.$$

C'est le seul cas dont la solution (ou sa dérivée) peut s'annuler en deux points distincts.
La solution générale peut s'écrire

$$\boxed{y(x) = A\cos(kx) + B\sin(kx)} \quad \text{ou} \quad y(x) = A'\cos(kx + \varphi) = B'\sin(kx + \psi)\,.$$

La première forme permet en général de déterminer facilement les constantes. En particulier, en fonction des symétries du système, si $y(x)$ est paire on a $B = 0$, et si $y(x)$ est impaire on a $A = 0$.

- Le cas $a = -k^2 < 0$ correspond à

$$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2} - k^2 y(x) = 0}\,.$$

La solution générale peut s'écrire

$$\boxed{y(x) = A\,e^{kx} + B\,e^{-kx}} \quad \text{ou} \quad \boxed{y(x) = A'\cosh(kx) + B'\sinh(kx)}\,.$$

La première forme est plus simple si l'on doit envisager $x \to +\infty$ (on a alors $A = 0$) ou $x \to -\infty$ (on a alors $B = 0$).
La seconde forme est plus simple si $y(x)$ est paire (on a alors $B' = 0$) ou impaire (on a alors $A' = 0$) ; elle est aussi plus simple si une condition initiale est $y(0) = 0$ (on a alors $A' = 0$) ou $\dfrac{dy}{dx}(x = 0) = 0$ (on a alors $B' = 0$).

Extension en complexes

Équation différentielle	Solution générale
$\dfrac{d^2\underline{y}}{dx^2} + \underline{a}\,\underline{y}(x) = 0, \quad a \in \mathbf{C}$	$\underline{y}(t) = \underline{A}\,e^{\underline{\lambda}x} + \underline{B}\,e^{-\underline{\lambda}x}$ avec $\underline{\lambda}^2 = \underline{a}$

- Cas particulier où $\underline{a}$ est imaginaire pur : $\underline{a} = ib$, avec $b \in \mathbf{R}$.

On a alors $\underline{\lambda}^2 = ib = b\,e^{i\pi/2}$, d'où $\lambda = \pm\sqrt{b}\,e^{i\pi/4}$, soit $\lambda = \pm(1+i)\sqrt{\dfrac{b}{2}}$.

Ce cas est rencontré dans l'étude de l'effet de peau.