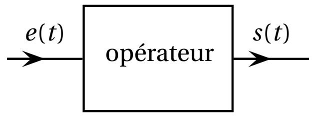
Électronique — I — Stabilité des systèmes linéaires

Système linéaire entrée-sortie continu et invariant

On considère un système à une entrée et une sortie, fonctions du temps :
- $e(t)$ est le **signal d'entrée** (ou excitation) ;
- $s(t)$ est le **signal de sortie** (ou réponse).



> Un système est linéaire si pour deux signaux d'entrée $e_1(t)$ et $e_2(t)$, on a
> $$\left.\begin{array}{l} e_1(t) \longrightarrow s_1(t) \\ e_2(t) \longrightarrow s_2(t) \end{array}\right\} \qquad \forall(\lambda,\mu) \in \mathbf{R}^2, \quad \lambda e_1(t) + \mu e_2(t) \longrightarrow \lambda s_1(t) + \mu s_2(t)$$

Un système est **invariant** si ses propriétés ne varient pas dans le temps : $e(t) \longrightarrow s(t) \quad \Longrightarrow \quad e(t-\tau) \longrightarrow s(t-\tau)\,, \quad \forall \tau.$

➤ Le signal sinusoïdal est *isomorphe* pour les systèmes linéaires : le signal de sortie est une sinusoïde de même fréquence :

$$e(t) = E\cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow s(t) = S\cos(\omega t + \psi)\,.$$

➤ Si $e(t) = 0$, on a $s(t) = 0$ pour un système linéaire.

> **Critère de linéarité** : si le signal de sortie comporte une composante harmonique à une fréquence absente du spectre du signal d'entrée, le système est non linéaire.

Représentation d'un système linéaire continu invariant

Représentation temporelle

> Les grandeurs d'entrée et de sortie sont reliées par une équation différentielle linéaire :
> $$a_0 s(t) + a_1 \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \cdots + a_n \frac{\mathrm{d}^n s}{\mathrm{d}t^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \cdots + b_m \frac{\mathrm{d}^m e}{\mathrm{d}t^m}\,, \tag{1}$$
> où n définit l'**ordre** du système.

La solution générale de (1) s'écrit $s(t) = s_\mathrm{h}(t) + s_\mathrm{p}(t)$ où
- $s_\mathrm{h}(t)$, solution générale de l'équation homogène, décrit le régime libre ;
- $s_\mathrm{p}(t)$, solution particulière de l'équation complète, décrit le régime permanent établi.

➤ Le régime établi $s_\mathrm{p}(t)$ est indépendant des conditions initiales.

➤ Tant que $s_\mathrm{h}(t)$ n'est pas négligeable devant $s_\mathrm{p}(t)$, on est dans le **régime transitoire**.

Représentation fréquentielle

On se place en régime harmonique (régime sinusoïdal).
Notation complexe (système linéaire) : $e(t) = E\cos(\omega t + \varphi) \longrightarrow \underline{e}(t) = \underline{E}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ où $\underline{E} = E\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}$ est l'amplitude complexe.

> Le système linéaire est décrit par la fonction de transfert
> $$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{b_0 + b_1(\mathrm{j}\omega) + \cdots + b_m(\mathrm{j}\omega)^m}{a_0 + (\mathrm{j}\omega)a_1 + \cdots + a_n(\mathrm{j}\omega)^n}\,. \tag{2}$$

➤ Le lien entre les descriptions temporelle et fréquentielle se fait par la correspondance $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \longleftrightarrow \times\mathrm{j}\omega$.

➤ On peut utiliser la notation symbolique $\boxed{H(p) = \dfrac{b_0 + b_1 p + \cdots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \cdots + a_n p^n}}$.

➤ L'ordre du système est le degré n du dénominateur.

Stabilité

Un système est stable si $\lim\limits_{t\to+\infty} s_\mathrm{h}(t) = 0$.

> Un système d'ordre 1 ou 2 est stable si les coefficients de l'équation différentielle régissant le régime libre — ou les coefficients du dénominateur de la fonction de transfert — sont de même signe.