Chapitre I : Intégrales généralisées :

- Définition des fonctions continues par morceaux.
- Intégrales généralisées :
  - ⋆ Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est dite convergente si $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$.
  - ⋆ On a la définition équivalente sur $[a;b[$, sur $]-\infty;b]$ et sur $]a;b]$.
  - ⋆ Si f est une fonction continue par morceaux sur $]a;b[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est dite convergente si pour $c \in]a;b[$ les intégrales $\displaystyle\int_{]a;c]} f(t)dt$ et $\displaystyle\int_{[c;b[} f(t)dt$ sont convergentes.
  - ⋆ Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a;b[$ (ou $]a;b]$) et si f est positive sur cet intervalle alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge ssi $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est majorée.
  - ⋆ Intégrales de référence à connaitre :
    $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Longleftrightarrow \dots$; $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge $\Longleftrightarrow \dots$; $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ converge $\Longleftrightarrow \dots$; $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)dt$ converge.
  - ⋆ Propriétés des intégrales : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
  - ⋆ Changement de variables, si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante (ou strictement décroissante) de classe C^1 alors ...
  - ⋆ Intégration par parties sur un intervalle quelconque si vous n'oubliez pas d'hypothèse (de convergence) ou alors on se ramène à une intégration par partie sur un segment (sans oublier les hypothèses C^1) suivi d'un passage à la limite.

- Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables
  - ⋆ La fonction f est intégrable sur I si f est continue par morceaux sur I et si $\displaystyle\int_I |f(t)|dt$ converge.
  - ⋆ Si $|f| \leq |g|$ sur $[a;+\infty[$ (ou sur $[a;b[$, ...) alors l'intégrabilité de g sur l'intervalle implique celle de f.
  - ⋆ Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} O(g(x))$ alors l'intégrabilité de g implique celle de f sur $[a;+\infty[$.
  - ⋆ Si $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$ alors l'intégrabilité de g est équivalente à celle de f sur $[a;+\infty[$.
  - ⋆ Si f est continue et intégrable sur I alors $\displaystyle\int_I |f(t)|dt = 0$ implique $f = 0$ sur I.
  - ⋆ L'ensemble des fonctions intégrables sur I est un espace vectoriel.

Questions de cours :

En plus d'une des questions suivantes l'examinateur vous demandera un développement limité usuel : e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $(1+x)^\alpha$, $\ln(1+x)$, $\arctan(x)$ en 0 à l'ordre n et $tan(x)$ en 0 à l'ordre 5.

– Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{it}}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1;+\infty[$ mais que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{it}}{t}dt$ converge.

– Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Gamma(n) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}dt$.
  a. Justifier que $\Gamma(n)$ existe.
  b. Montrer que pour tout entier naturel n on a $\Gamma(n+1) = (n+1)\Gamma(n)$.
  On en déduit alors que $\Gamma(n) = n!$. (On ne demande pas de montrer ce point dans cette question de cours.)

– Déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{\sqrt{t}}dt$.

– Nature et valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{t}}dt$.