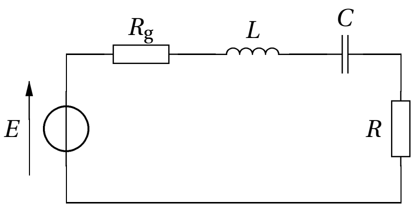
DM n° 1 — Solution

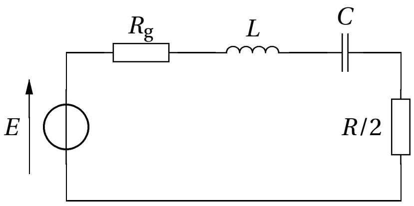
Étude d'un circuit (oral Centrale)

1. L'association de deux résistance R en parallèle équivalent à une résistance $R/2$, on peut représenter les deux circuits étudiés :

Circuit A :



Circuit B :



Par un examen de l'équivalent en très basse fréquence et en très haute fréquence du circuit RLC s'écrit, on obtient la nature du filtrage effectué en fonction du dipôle aux bornes duquel on prend la tension :

filtre passe-bas tension aux bornes de C;
filtre passe-bande tension aux bornes de R;
filtre passe-haut tension aux bornes de L.

Les courbes ① et ② correspondent à un filtre passe-bande : elle représentent la tension aux bornes de la résistance.

Les courbes ③ et ④ correspondent à un filtre passe-bas : elle représentent la tension aux bornes du condensateur.

Tension aux bornes de la résistance pour le circuit A :

$$\underline{U}_{R,\mathrm{A}} = \frac{R}{R+R_\mathrm{g}+\mathrm{j}\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}E.$$

Tension aux bornes de la résistance pour le circuit B :

$$\underline{U}_{R,\mathrm{A}} = \frac{R/2}{R/2+R_\mathrm{g}+\mathrm{j}\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}E.$$

La résonance se produit quand $L\omega-\frac{1}{C\omega}=0$. On a alors

$$U_{R,\mathrm{A,max}} = \frac{R}{R+R_\mathrm{g}}E \quad \text{et} \quad U_{R,\mathrm{B,max}} = \frac{R}{R+2R_\mathrm{g}}E.$$

On constate que $U_{R,\mathrm{B,max}} < U_{R,\mathrm{A,max}}$, ce qui permet d'identifier ces courbes.

courbe ① :	U_R, circuit A
courbe ② :	U_R, circuit B

Tension aux bornes du condensateur pour le circuit A :

$$\underline{U}_{C,\mathrm{A}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{R+R_\mathrm{g}+\mathrm{j}L\omega+\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}E$$

soit

$$\underline{U}_{C,\mathrm{A}} = \frac{1}{1+\mathrm{j}(R+R_\mathrm{g})\omega-LC\omega^2}E.$$

L'amplitude de la tension vaut

$$\left|\underline{U}_{C,\mathrm{A}}\right| = \frac{E}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+(R+R_\mathrm{g}^2C^2\omega^2}}.$$

Elle présente un maximum (résonance) si le dénominateur passe par un minimum, c'est-à-dire si

$$f(\omega) = (1-LC\omega^2)^2+(R+R_\mathrm{g}^2C^2\omega^2$$

passe par un minimum, soit $f'(\omega_\mathrm{r})=0$.

$$f'(\omega) = -2(1-LC\omega^2)2LC\omega+2(R+R_\mathrm{g})^2C^2\omega = 0.$$

On a $f'(\omega_\mathrm{r})=0$ avec $\omega_\mathrm{r}\neq 0$ pour

$$-2L(1-LC\omega_\mathrm{r}^2)+(R+R_\mathrm{g})^2C = 0$$

soit

$$LC\omega_\mathrm{r}^2 = 1-\frac{(R+R_\mathrm{g})^2C}{2L}. \qquad (1)$$

Comme $LC\omega_\mathrm{r}^2>0$, il faut

$$1-\frac{(R+R_\mathrm{g})^2C}{2L} > 0$$

soit

$$R+R_\mathrm{g} < \sqrt{\frac{2L}{C}}.$$

Si la résistance du circuit est trop élevée, on n'observe pas de résonance.

On constate qu'il y a résonance pour la courbe ③ mais pas pour la courbe ④.

Comme la résistance du circuit A est supérieur à celle du circuit B, on en déduit l'identification des courbes.

courbe ③ :	U_C, circuit B
courbe ④ :	U_C, circuit A

2. Pour $\omega=0$, on a $\underline{U}_C=E$ pour les deux circuits. On lit directement

$$\boxed{E = 15\,\mathrm{V}}.$$

Pour $L\omega_0-\frac{1}{C\omega_0}=0$, la tension de résonance aux bornes de R pour le circuit A est

$$U_{R,\mathrm{A,max}} = \frac{R}{R+R_\mathrm{g}}E.$$

L'impédance du circuit vaut

$$\underline{Z} = R + R_g + j\left(L\omega - \frac{1}{\omega}\right).$$

À la pulsation de résonance ω_0, elle vaut $\underline{Z}_0 = R + R_g$, d'où, l'intensité étant maximale

$$E = (R + R_g)\, i_{max}.$$

On a donc

$$U_{R,A,max} = R i_{max}.$$

On mesure $U_{R,A,max} = 10\ \Omega$, d'où

$$\boxed{R = 100\ \text{V}}.$$

Avec $E = 15$ V, on déduit

$$\frac{R}{R + R_g} = \frac{U_{R,A,max}}{E} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

d'où $R_g = R/2$. On a donc

$$\boxed{R_g = 50\ \Omega}.$$

➤ On retrouve la valeur usuelle de la résistance interne d'un GBF.

On a vu que la résonance aux bornes de la résistance se produit pour

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

soit pour la fréquence

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

On a montré que la résonance aux bornes du condensateur se produit dans le cas du circuit B, pour une pulsation donnée patr la relation (1) en remplaçant R par $R/2$, soit

$$LC\omega_r^2 = 1 - \frac{(R/2 + R_g)^2 C}{2L}$$

soit

$$\omega_r^2 = \frac{1}{LC} - \frac{(R/2 + R_g)^2}{2L^2} = \omega_0^2 - \frac{(R/2 + R_g)^2}{2L^2}.$$

On en déduit

$$L^2 = \frac{(R/2 + R_g)^2}{2(\omega_0^2 - \omega_r^2)} = \frac{(R/2 + R_g)^2}{2 \times 4\pi^2 (f_0^2 - f_r^2)},$$

d'où

$$\boxed{L = \frac{R + 2R_g}{4\sqrt{2}\pi\sqrt{f_0^2 - f_r^2}}}.$$

On mesure sur le document $f_0 = 158$ Hz et $f_r = 112$ Hz, d'où

$$\boxed{L = 100\ \text{mH}}.$$

La capacité se déduit de

$$\omega_0^2 = 4\pi^2 f_0^2 = \frac{1}{LC}$$

d'où

$$C = \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 L}.$$

On calcule

$$\boxed{C = 10{,}0\ \mu\text{F}}.$$

3. On peut réaliser un filtre passe-haut en considérant la tension aux bornes de la bobine.

On a alors

$$\underline{U}_L = \frac{jL\omega}{R + R_g + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} E$$

soit

$$\underline{U}_L = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + j(R + R_g)C\omega} E.$$

La fonction de transfert est donc

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{-LC\omega^2}{1 - LC\omega^2 + j(R + R_g)C\omega}}.$$

Très basses fréquences

$$\underline{H}_{BF}(j\omega) \approx -LC\omega^2 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2}.$$

Le gain est $G_{BF}(\omega) = \omega^2/\omega_0^2$, d'où l'asymptote

$$G_{dB,BF} = 40\log\omega - 40\log\omega_0,$$

qui présente une pente de +40 dB/décade.

La phase est $\varphi_{BF} = \pi$.

Très hautes fréquences On a $\underline{H}_{HF}(j\omega) \approx 1$, donc $G_{dB,HF} = 0$.

Les asymptotes en gain se coupent en $\omega = \omega_0$.

La phase est $\varphi_{HF} = 0$.

On remarque que pour $\omega = \omega_0$, on a

$$\underline{H}(j\omega_0) = -\frac{1}{j(R + R_g)C\omega_0} = \frac{j}{(R + R_g)C\omega_0},$$

soit $\varphi(\omega_0) = \pi/2$.

Diagramme asymptotique en gain :

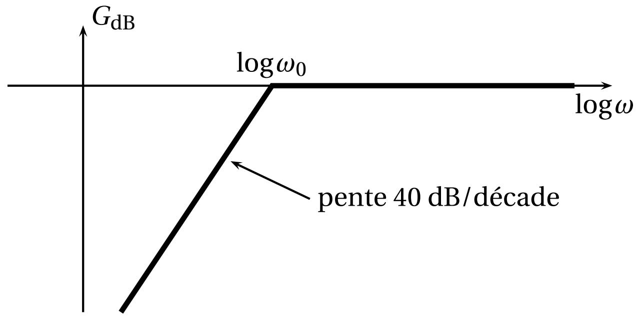


Diagramme asymptotique en phase :