Complément mathématique — Analyse spectrale d'un signal

1 — Décomposition en série de Fourier

Soit $u(t)$ un signal de période[1] T. On peut écrire $u(t)$ comme la sonne d'une série trigonométrique :

$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

où t_0 est un instant choisi arbitrairement[2].
On peut aussi écrire la décomposition sous la forme

$$u(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

les coefficients étant alors donnés par $\boxed{c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}}$ et $\boxed{\varphi_n = -\arctan \frac{b_n}{a_n}}$

Le terme constant représente la **valeur moyenne** du signal :

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le signal $u(t)$ se décompose comme la somme d'un terme constant et de signaux harmoniques de pulsations $\omega_n = n\omega$ multiples de la pulsation du signal.

- La composante $c_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ est appelée **harmonique de rang n**.
- L'harmonique de rang 1 est appelé le **fondamental**. C'est un signal sinusoïdal de même période que $u(t)$.

On peut écrire la décomposition en série de Fourier sous forme complexe :

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{c}_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi n f t} \quad \text{avec} \quad \underline{c}_n = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2\pi n f t}\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

- Pour un signal à valeurs réelles, on a $\underline{c}_n = \underline{c}^*_{-n}$.

Propriétés

L'amptitude des harmoniques tend vers zéro quand leur rang tend vers l'infini : $\boxed{\lim_{n\to\infty} c_n = 0}$.

Cas d'un signal pair Si $u(t)$ est **paire** : $b_n = 0$, $\forall n$, et $u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(n\omega t)$.

- L'expression des coefficients se simplifie sous la forme $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$.

Cas d'un signal impair Si $u(t)$ est **impaire** : $a_n = 0$, $\forall n$, et $u(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(n\omega t)$

- L'expression des coefficients se simplifie sous la forme $b_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$.

Égalité de Parseval

Elle relie la valeur moyenne quadratique du signal $u(t)$ à ses coefficients de Fourier :

$$\langle u^2(t)\rangle = c_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n^2$$

1. On peut lui associer la pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$.
2. L'intégrale doit être calculée sur un intervalle de largeur T ; on choisira usuellement $[0, T]$ ou $[-T/2, T/2]$.

2 — Représentation fréquentielle d'un signal

Un signal $u(t)$ peut avoir une représentation temporelle ou une représentation fréquentielle.
La représentation fréquentielle d'un signal est construite ainsi :

— l'axe des abscisses représente la fréquence (ou la pulsation);

— l'axe des ordonnées représente l'amplitude (ou la phase) de chaque harmonique;

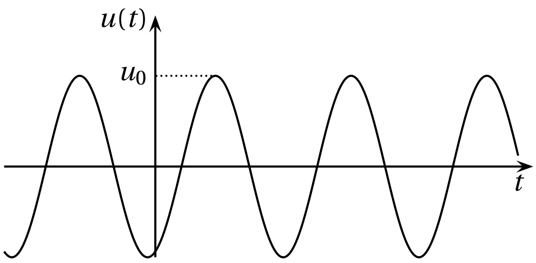
— un harmonique est représenté par une « raie » positionnée à la fréquence correspondante;

— la valeur moyenne c_0 est représentée par une raie placée à l'origine (fréquence nulle).

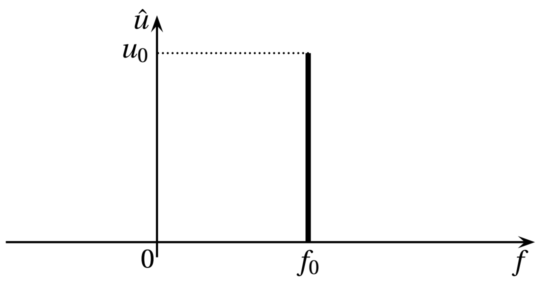
Exemples

Soit $u(t) = u_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$ un signal harmonique de fréquence f_0.

Représentation temporelle

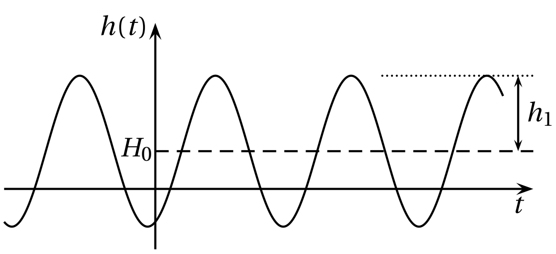


Représentation fréquentielle (en amplitude)

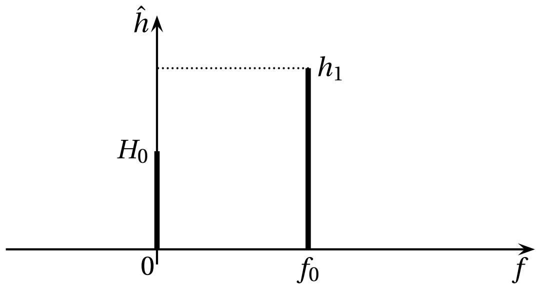


Soit $h(t) = H_0 + h_1 \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$. Sa valeur moyenne est $\langle s(t) \rangle = H_0$. L'amplitude des oscillations autour de H_0 est h_1.

Représentation temporelle

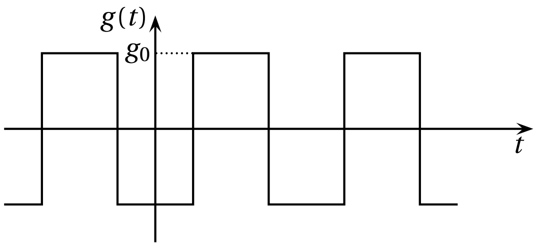


Représentation fréquentielle (en amplitude)

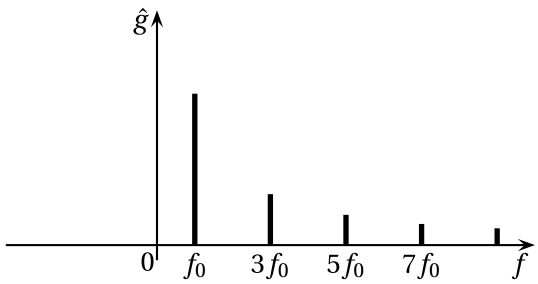


Soit $g(t)$ un signal carré de période $T = 1/f_0$, d'amplitude g_0, symétrique.

Représentation temporelle



Représentation fréquentielle (en amplitude)



Symétrie de glissement

Une fonction f de période T présente une symétrie de glissement si $f(t + T/2) = -f(t)$: elle est changée en son opposé par translation d'une demi-période, et présente donc des alternantes positives et négatives de même forme. C'est le cas des signaux créneaux, triangulaires ou en dents de scie.
Le spectre d'une telle fonction ne comporte que des harmoniques de rang impair : $a_{2n} = 0$ et $b_{2n} = 0$.