

Limites de suites explicites :

- **Exercice 1** Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - \frac{\pi}{2} \leq \frac{u_n}{2n+5}$.

Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.

- **Exercice 2** On pose pour $n \in \mathbb{N} : u_n = \sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

1. Montrer que la suite de terme général u_n est bornée.

2. Montrer que les suites extraites $(u_{k^2})_{k \in \mathbb{N}}$ et $(u_{k^2+2k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergent et conclure quant à la convergence de $(u_n)_n$.

Exercice 3 Étudier la convergence des suites $u_n = \ln(2 + \cos(n\pi))$ et $v_n = \sqrt[n]{n^2}$.

- ★ **Exercice 4** Pour chacune des suites (u_n) ci-dessous, trouver une suite simple équivalente à (u_n) lorsque $n \rightarrow +\infty$.

1) $u_n = \cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1 + \frac{1}{2n} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

3) $u_n = e^{\frac{1}{n-1}} + e^{\frac{1}{n+1}} - 2e^{\frac{1}{n}}$

5) $u_n = \sum_{k=1}^n k!$

2) $u_n = n + e^n + \ln n$

4) $u_n = \sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n^2 - 1} + 3n - 1$

- ★ **Exercice 5** Déterminer la limite éventuelle des suites suivantes :

1) $u_n = \frac{n^2 + (-1)^n n + 2}{3^n + \sin n}$

3) $u_n = n^2 \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{2}$

5) $u_n = \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$

2) $u_n = \frac{\sqrt{9n^2 + 1} - 3n}{3^n + \sin n}$

4) $u_n = n \ln(n^2 - 3n + 2) - n \ln(n^2 + 1)$

6) (ENSEA 2019) $u_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}$.

Un peu d'epsilon :

- **Exercice 6** Montrer qu'une suite convergente $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{Z}$ est stationnaire.

- **Exercice 7** Soit (u_n) une suite de nombres réels.

1. On suppose que la suite (u_{2n}) et la suite (u_{2n+1}) convergent vers une même limite. Montrer que la suite (u_n) converge.

2. On suppose que les suites (u_{2n}) , (u_{2n+1}) et (u_{5n}) convergent. Montrer que la suite (u_n) converge.

Exercice 8 Lemme de Cesàro

On cherche à montrer le résultat suivant :

« Si une suite (u_n) converge vers ℓ alors $\left(\frac{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n+1}\right)$ converge aussi vers ℓ . »

Soit (u_n) une suite complexe convergente, on note ℓ sa limite. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Justifier l'existence d'un rang n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$: $\frac{1}{n+1} \sum_{k=n_0+1}^n |u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
2. Justifier alors l'existence d'un rang n_1 tel que pour tout $n \geq n_1$: $\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n_0} |u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.
3. En déduire qu'alors $\frac{u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n+1}$ tend vers ℓ .
4. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 9 CCINP MP 2025 *Utilisation du théorème précédent*

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k^2$ et on suppose que $a_n S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

1. Montrer que la suite (S_n) diverge (raisonner par l'absurde), puis en déduire que $a_n \rightarrow 0$.
2. Calculer les limites de $\frac{S_{n-1}}{S_n}$, puis de $\int_{S_{n-1}}^{S_n} t^2 dt$.
3. Montrer que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt[3]{3n}}$.

Suites récurrentes :

Exercice 10 Quel est le comportement quand n tend vers $+\infty$ de la suite déterminée par :

$$u_{n+2} = \frac{5}{3}u_{n+1} - \frac{4}{9}u_n \quad \text{avec } u_0 = 1 \text{ et } u_1 = 1/3.$$

★ **Exercice 11** Mines-Télécom 2025

On définit la suite (a_n) par $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

1. Déterminer la convergence de la suite (a_n) .
2. Étudier la suite (a_n^2) .
3. autres

★ **Exercice 12** Mines-Télécom 2025

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Étudier la convergence de la suite (u_n) .
2. Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que la suite $(v_n) = \left(\frac{1}{u_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{u_n^\alpha} \right)$ soit de limite finie.

Exercice 13 CCINP 2022 ... 2024 Soit (u_n) une suite telle que $u_0 \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

1. Montrer que $u_n^3 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 6(u_n - u_{n+1})$ et que $u_n^2 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 6 \ln \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} \right)$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série de terme général u_n^p .

Exercice 14 Soit $u_0 \in [0; 3[$. On envisage une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation $u_{n+1} = \sqrt{\frac{2}{3 - u_n}}$.

1. Trouver α et β avec $\alpha < \beta$ tels que la suite (u_n) soit constante si $u_0 = \alpha$ ou $u_0 = \beta$.
2. Étudier la suite (u_n) selon que $u_0 \in [0, \alpha[$ ou que $u_0 \in]\alpha; \beta[$.
3. Montrer que si $u_0 > \beta$ alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas définie.

• **Exercice 15** Navale 2019

Soit une suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{C}^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + |u_n|)$.
Montrer que la suite (u_n) converge et exprimer sa limite en fonction de u_0 .

Exercice 16 Étudier la suite $(u_n)_n$ déterminée par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \cos(u_n)$.

★ **Exercice 17** CCP PC

On considère la suite réelle définie par $u_0 > 0$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k}$.

1. Donner une relation entre u_{n+1} et u_n (pour $n \leq 1$).
2. Existence et valeur de $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Suites implicites :

Exercice 18 Mines-Télécom 2024

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]n; +\infty[$, on pose $f_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{x - k}$.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la fonction f_n est strictement décroissante sur $]n; +\infty[$. Donner les limites de cette fonction en n^+ et en $+\infty$.
2. Soit $A > 0$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists ! x_n \in]n; +\infty[$ tel que $f_n(x_n) = A$.
3. Déterminer la limite de la suite (x_n) .

• **Exercice 19** CCINP 2023

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $x^n + x\sqrt{n} - 1 = 0$.

1. Montrer que cette équation admet une unique solution sur $[0; 1]$. On note u_n cette solution.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
3. Déterminer la nature de la série $\sum u_n$.
4. Déterminer la nature de la série $\sum (-1)^n u_n$.

Exercice 20 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = X^n + X - 1$.

Montrer que P_n admet une unique racine α_n dans $]0; 1[$ et étudier (monotonie, convergence) la suite (α_n) .

★ **Exercice 21** Mines-Télécom 2023

1. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, l'équation $1 + \ln(x + n) = x$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}_+$. On note u_n cette solution.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\ln(n) < u_n < n$ et en déduire un équivalent de u_n .

Manipulation de sommes :

● **Exercice 22** Mines-Télécom 2022

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $u_n = 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \alpha \ln n$.

Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que (u_n) converge.

★ **Exercice 23** CCINP 2022+2023+2024

Soit (a_n) une suite de réels positifs. On note $u_n = \frac{a_n}{(1+a_1)\dots(1+a_n)}$.

1. Exprimer $u_1 + u_2$ en fonction de $\frac{1}{(1+a_1)(1+a_2)}$. Généraliser.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge.
3. Dans le cas où $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 24 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{p=1}^n \sin\left(\frac{p}{n^2}\right)$.

Déterminer la limite de (u_n) .

Divers :

Exercice 25

1. Montrer que les suites définies pour $n \geq 1$ par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n \cdot n!}$$

sont adjacentes.

2. Montrer que la limite ℓ de la suite (u_n) est un nombre rationnel.

Indications : On raisonne par l'absurde en posant $l = \frac{p}{q}$, en encadrant ℓ par u_q et v_q , puis en prouvant que $q!u_q$ est un nombre entier.

3. Montrer que $\ell = e$ en utilisant une formule de Taylor.