

Nature d'une série :

★ **Exercice 1** Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

- | | | |
|--|---|---|
| 1. $u_n = \ln(n^2 + 1) - 2\ln(n)$ | 5. $u_n = \frac{n}{2^n}$ | 9. $u_n = \frac{\ln n}{n^2}$ |
| 2. $u_n = \frac{1}{e^{1/n} - 1} - n$ | 6. $u_n = \frac{3^n}{n^n}$ | 10. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} \ln n}$ |
| 3. $u_n = n \frac{\cos(1/n) - 1}{\tan(1/n)}$ | 7. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}!}$ | 11. $u_n = \frac{e^{-\sqrt{\ln n}}}{n}$ |
| 4. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ | 8. $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ | 12. $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2 + 1})$ |

Exercice 2 ENSEA Étude de la nature de la suite de terme général $u_n = \ln(n) + a \ln(n+1) + b \ln(n+2)$.

• **Exercice 3** CCP PC 2007

Nature des séries de terme général $u_n = \sin(\pi(2 - \sqrt{3})^n)$ et $v_n = \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.

Exercice 4 On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^2}$.

Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de natures différentes.

★ **Exercice 5** CCP 2017 Étudier en fonction du réel $\alpha > 0$ la convergence de la série $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Exercice 6 Donner la nature de la série de terme général $u_n = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \frac{\pi}{6}$.

• **Exercice 7** *Séries dites de BERTRAND (classique savoir refaire)*

Discuter, selon $(\alpha, \beta) \in]0; +\infty[^2$, la nature de la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.

• **Exercice 8** Mines 2024 Soient $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite décroissante qui tend vers 0 et (b_n) une suite telle que la suite (B_n) définie par $B_n = \sum_{k=1}^n b_k$ est bornée.

- Montrer que $\sum_{k=1}^n a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.
- En déduire que la série $\sum a_k b_k$ converge.
- Soit $\theta \in \mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{e^{in\theta}}{n}$ converge.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \mapsto \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$. Montrer que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
 - Montrer que la fonction $x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

- **Exercice 9** Mines-Télécom 2022-2025 On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(e^{u_n} - u_n)$. Étudier la convergence de la série de terme général u_n .

Exercice 10 CCP 2018

Déterminer en fonction de a la nature de la série de terme général $\sum_{n \geq 1} u_n$ où $u_1 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n^a}$.

Exercice 11 CCP

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{u_n e^{-u_n}}{n^2}$.

Calcul de la somme d'une série :

Exercice 12 Pour n entier supérieur à 3, on pose $u_n = \frac{1}{n^2 - 4}$.

Montrer que $\sum u_n$ converge et calculer la somme $\sum_{n=3}^{+\infty} u_n$.

Exercice 13 Pour n entier supérieur à 1, on pose $u_n = \frac{1}{1 + 2 + \dots + n}$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

Exercice 14 On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{[\sqrt{n+1}] - [\sqrt{n}]}{n}$. Montrer la convergence de la série $\sum u_n$ et calculer sa somme.

Exercice 15 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{2^n + n^2}{n!}$.

Montrer que la série $\sum u_n$ converge et calculer sa somme.

★ **Exercice 16** On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

1. Vérifier que $\sum_{p \geq 1} \frac{1}{(2p)^2}$ converge et préciser la valeur de sa somme.
2. Montrer que $\sum_{p \geq 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$ converge et préciser la valeur de la somme.

- **Exercice 17** Mines PC

1. Montrer que la série de terme général $(-1)^n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$ converge.

On note $S = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$ et $S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$.

2. Montrer que $S_{2n} = \ln \left(\frac{(2n+1)((2n)!)^2}{2^{4n}(n!)^4} \right)$ et en déduire S .

3. Donner une valeur approché de S à 10^{-2} près.

Étude asymptotique de somme partielle ou de reste :

★ **Exercice 18** Comparaison série/intégrale, cas de la divergence

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

1. Justifier que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.
2. Donner un encadrement du terme général u_k et en déduire un encadrement de S_n .
3. Vérifier que $S_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

Exercice 19 Comparaison série/intégrale, cas de la convergence

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ et $S_n = \sum_{k=1}^n u_k$.

1. Justifier l'existence d'un réel ℓ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \ell$.
2. Donner un équivalent du reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

• **Exercice 20** CCINP 2021-2022-2023 Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $a_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{1+k^2}$.

1. Justifier l'existence de a_n .
2. Montrer que $a_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
3. Déterminer le domaine de convergence de $\sum a_n x^n$.

• **Exercice 21** CCINP MP 2025

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{2k} + \sqrt{2k-1}}$.
2. En déduire un équivalent de u_n .
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = u_{n+1} + u_n$. Montrer que $\sum v_{n+1} - v_n$ converge et en déduire que la suite (v_n) converge.
4. Retrouver l'équivalent de u_n .

Séries alternées :

Exercice 22 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

1. Déterminer le signe de u_n selon n .
2. Montrer que $u_n = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$.

3. Montrer que la série $\sum u_n$ est semi-convergente et que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \right| \leq \pi \frac{1}{2n+2}$
on utilisera $|\sin(x)| \leq |x|$ après avoir majorer le reste.
4. Déterminer un rang n_0 pour lequel la somme partielle $\sum_{n=1}^{n_0} u_n$ est une valeur approchée de la somme S de la série à 10^{-2} près.
 À l'aide d'une calculatrice donner une valeur approchée de S .

Exercice 23 *Attention aux équivalents.*

On pose pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$: $u_n = \frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$ et $v_n = \frac{(-1)^n \ln n}{n (\ln(n) + (-1)^n)}$.

- Déterminer un équivalent de u_n .
- Déterminer un équivalent de $u_n - \frac{(-1)^n}{n}$ puis la nature la série $\sum (u_n - \frac{(-1)^n}{n})$.
- Déterminer un équivalent de $v_n - \frac{(-1)^n}{n}$ et la nature la série $\sum (v_n - \frac{(-1)^n}{n})$.
- En déduire qu'ici $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$ et que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de natures **différentes**.

★ **Exercice 24** CCINP 2023 et avant et après Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$.

- Montrer que la suite (U_n) est bien définie et tend vers 0.
- Montrer que la série de terme général $V_n = \frac{(-1)^n}{n} U_n$ est convergente.
- Soit $W_n = \frac{(-1)^n}{n} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$. Quelle est la nature de la série $\sum W_n$?

Divers :

Exercice 25 Soit $\sum a_n$ une série convergente de réels positifs avec (a_n) décroissante. Montrer que $a_n = \underset{n \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{n} \right)$.

★ **Exercice 26** Soit (a_n) une suite de réels. Montrer que si $\sum a_n^2$ converge alors $\sum \frac{a_n}{n}$ converge.
 La réciproque est-elle vraie ?

• **Exercice 27** *Un produit de Cauchy sorti du chapeau* Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)3^{-n}$.

On pourra s'intéresser au produit de Cauchy de $\sum \frac{1}{3^n}$ par elle-même. Les 5/2 pourront donner une version « séries entières » pour répondre à cette question.