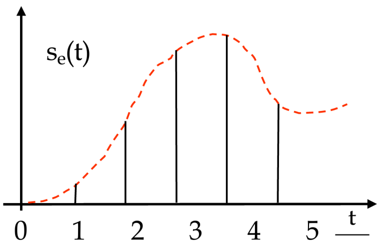
Conversion d'un signal analogique en signal numérique

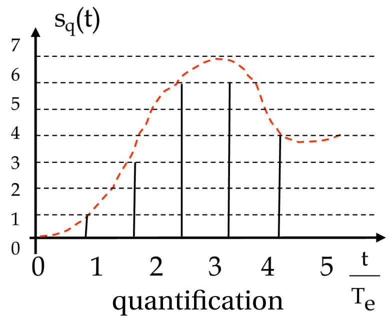
Un signal analogique est une grandeur dépendant de manière continue du temps : $s(t)$.
Un signal numérique est un ensemble fini de valeurs numériques.
La numérisation d'un signal analogique est caractérisée par deux discrétisations :

l'échantillonnage : on prélève des valeurs du signal analogique à des instants régulièrement espacés dans le temps (discrétisation dans le temps) ;

la quantification : on code l'amplitude de chaque mesure sur un élément fini d'éléments binaires (discrétisation sur l'amplitude).



échantillonnage



quantification

Échantillonnage

Les mesures se font à des instants séparés de T_e, pendant une durée T_{tot}.

➤ L'échantillon comporte N valeurs, avec $T_{tot} = (N-1)\,T_e$ (on retiendra $T_{tot} = N\,T_e$ quand N est grand).

➤ La **fréquence d'échantillonnage** est $f_e = 1/T_e$.

$$\underset{\text{signal continu}}{x(t)} \xrightarrow{\text{échantillonnage}} \underset{\text{signal à temps discret}}{x_k = x(kT_e) \text{ où } k \in \mathbf{Z}}$$

Le choix de la fréquence d'échantillonnage est le résultat de compromis ; une valeur de f_e élevée :

— donne un signal échantillonné plus fidèle au signal analogique ☺ ;

— nécessite une traitement rapide des informations ☹ ;

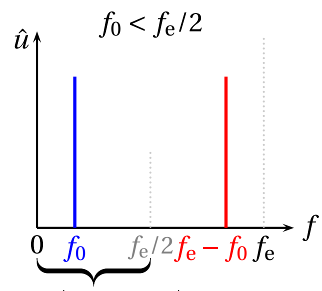
— conduit à des échantillons de grande taille nécessitant une grande mémoire de stockage ☹.

Conditions de Nyquist-Shannon

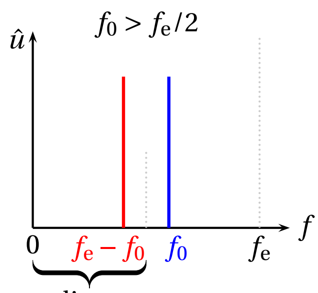
Soit $s(t)$ un signal dont le spectre est compris dans l'intervalle $[0, f_{max}]$.
L'échantillonnage à la fréquence f_e ne modifie pas le spectre du signal si $f_e > 2\,f_{max}$.

La partie utile du spectre du signal échantillonné est l'intervalle $[0, f_e/2]$.

Une composante du signal $s(t)$ de fréquence $f_0 > f_e/2$ donne dans le spectre du signal échantillonné une composante de fréquence $f_e - f_0$: c'est le phénomène de **repliement de spectre**.



spectre correct



repliement

- La fréquence $f_\mathrm{N} = f_\mathrm{e}/2$ est appelée **fréquence de Nyquist**.
- Le spectre complet d'une sinusoïde de fréquence f_0 échantillonnée à la fréquence f_e est périodique, constitué des fréquences f_0, $f_\mathrm{e} - f_0$, puis $\{k f_\mathrm{f} + f_0, (k+1) f_\mathrm{e} - f_0\}$ pour $k \geqslant 1$ entier.
  L'intervalle $[0, f_\mathrm{e}]$ représente une période du spectre, lequel présente une symétrie par rapport à $f_\mathrm{e}/2$.

Nécessité d'un filtre anti-repliement

Si le signal comporte des fréquences $f > f_\mathrm{e}/2$, il faut le filtre avant l'échantillonnage avec un filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_\mathrm{N} = f_\mathrm{e}/2$, appelé **filtre anti-repliement**.

- Le filtrage anti-repliement doit s'effectuer sur le signal analogique, avant l'échantillonnage.
- Lorsque $f < f_\mathrm{e}/2$, il y a sous-échantillonnage ; lorsque $f > f_\mathrm{e}/2$, il y a sur-échantillonnage.

Résolution spectrale

On peut déterminer le spectre d'un échantillon de N points x_k ($0 \leqslant k < N$) à l'aide de la transformée de Fourier discrète (TFD), qui retourne N valeurs du spectre calculées selon

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \, \mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi k \frac{n}{N}} \quad \text{pour } 0 \leqslant k < N.$$

On obtient alors une représentation discrète du spectre du signal échantillonné, constituée de N valeurs sur l'intervalle $[0, f_\mathrm{e}]$, dont l'intervalle Δf entre deux valeurs voisines donne la résolution en fréquence.

> La résolution en fréquence dans le spectre d'un échantillon calculé par transformée de Fourier discrète est reliée à la longueur de l'échantillon selon
> $$\Delta f = \frac{f_\mathrm{e}}{N} = \frac{1}{T_\mathrm{tot}}.$$

- On a intérêt à prendre une durée totale de l'échantillon élevée pour augmenter la résolution spectrale.
- La transformée de Fourier rapide (TFR, an anglais FFT pour *Fast Fourier Transform*) est un algorithme diminuant considérablement la complexité du calcul de la TRF, rendant ce dernier accessible. Il nécessite un échantillon dont la taille est de la forme $N = 2^p$.

Quantification et résolution

Le **calibre** C de l'acquisition détermine la plage de valeurs mesurables du signal : $[-C, +C]$.
Lors d'une quantification sur p bits, le signal peut prendre 2^p valeurs.
La résolution r, ou pas de quantification, est l'écart entre deux valeurs voisines de l'amplitude : l'intervalle $[-C, +C]$ est divisé en $2^p - 1$ intervalle, de largeur $r = \dfrac{2C}{2^p - 1}$.