Chapitre II : Suites et séries numériques

- Suites numériques (révisions) :
  - ⋆ Les suites classiques : arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2.
  - ⋆ Convergence d'une suite : connaitre la définition en terme de quantificateur.
  - ⋆ Propriétés sur la convergence. Une suite de réels convergente est bornée.
  - ⋆ Savoir montrer qu'une suite diverge avec des suites extraites.
  - ⋆ Une suite monotone et bornée converge. Théorème d'encadrement. Théorème des suites adjacentes.
  - ⋆ Équivalence de deux suites. Recherche d'un équivalent en $+\infty$.
  - ⋆ Recherche de la limite d'une suite à l'aide d'un développement limité ou d'un équivalent.
  - ⋆ Suites définies par une relation de récurrence de la forme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{où } f \text{ est une fonction continue.}$$

- Séries numériques :
  - ⋆ Maitriser les différentes notations : la série, une somme partielle, la somme et le reste dans le cas convergeant.
  - ⋆ Les séries de référence : séries géométriques $\sum z^n$, séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.
  - ⋆ Justification de la convergence ou de la divergence d'une série à termes positifs :
    - ⋄ Si $0 \leq a_n \leq b_n$ et $\sum b_n$ converge alors $\sum a_n$ converge.
    - ⋄ Si $0 \leq a_n \leq b_n$ et $\sum a_n$ diverge alors $\sum b_n$ diverge.
    - ⋄ Si $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $a_n = \underset{+\infty}{O}(b_n)$ et $\sum b_n$ converge alors $\sum a_n$ converge.
    - ⋄ Si $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$, $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$ alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature.
  - ⋆ Comparaison série/intégrale : si f est continue, décroissante, positive sur $[n_0; +\infty[$ alors $\sum\limits_{n \geq n_0} f(n)$ converge ssi $\int_{n_0}^{+\infty} f(t)dt$ est convergente.
  - ⋆ La règle de d'Alembert.
  - ⋆ La formule de Stirling : $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.
  - ⋆ Séries alternées et théorème spécial :
    si (u_n) est une suite de réels positifs, décroissante et converge vers 0
    alors $\sum(-1)^n u_n$ converge et $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$ est du signe de $(-1)^{n+1}u_{n+1}$ et $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.
  - ⋆ Séries absolument convergentes : l'absolue convergence implique la convergence.
  - ⋆ Produit de Cauchy de séries absolument convergentes.

Questions de cours :

- On définit la suite (v_n) par $(v_n) : \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_1 = -\frac{1}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n \end{cases}$. Donner l'expression explicite de v_n.
- Justifier suivant la valeur de a_0 le plan d'étude que vous allez effectuer pour étudier la convergence de la suite $(a_n) : \begin{cases} a_0 \geq 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = a_n^2 \end{cases}$.
  L'étude n'est pas demandée.
- Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{1}{1 + (-1)^n n^{3/4}}$.
- Montrer que $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$.
- Avec la définition de l'exponentiel $exp(a) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$, montrer que $exp(a+b) = exp(a)exp(b)$. (Vous utiliserez un produit de Cauchy).