DS n° 1 — Électronique

Le sujet comporte quatre parties indépendantes.

Merci de suivre les conseils suivants :
- laisser un espace en début de copie pour la note et les commentaires ;
- laisser une marge à chaque page pour les commentaires et décompte des points ;
- respecter et indiquer la numérotation des questions ;
- souligner ou encadrez les résultats.

Partie I — Conditionnement d'un pluviomètre (Banque PT 2024)

Un pluviomètre est constitué d'un condensateur cylindrique vertical qui peut se remplir d'une hauteur h d'eau. Sa capacité est alors de la forme $C(h) = C_0(Ah + B)$ où C_0, A et B sont des constantes.
Pour mesurer cette capacité $C(h)$, on insère le condensateur dans le multivibrateur astable présenté en figure I-1, qui est constitué de deux amplificateurs linéaires intégrés (ALI). Nous allons montrer que la période des tensions électriques dans ce montage est proportionnelle à la capacité du pluviomètre.

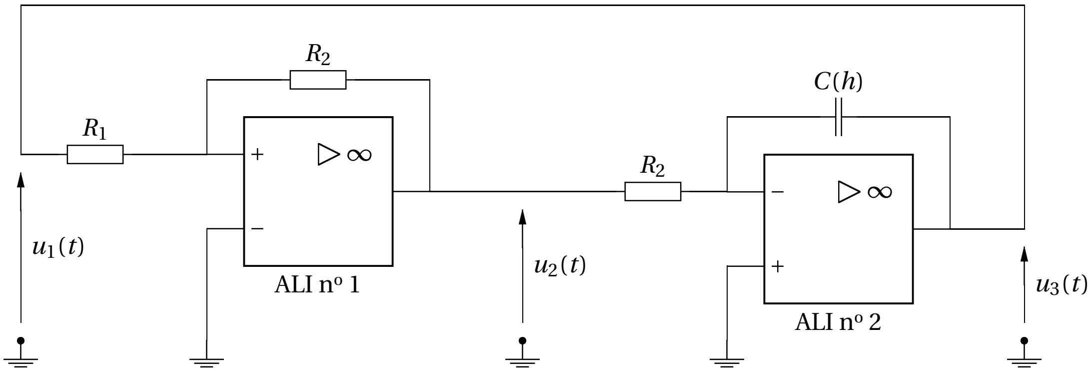


FIGURE I-1 – Multivibrateur astable réalisant le conditionnement du pluviomètre

On suppose que les deux ALI de ce montage sont idéaux et alimentés par une tension continue. On note V_{sat} leur tension de saturation.

1. Rappeler les valeurs des courants de polarisation, de l'impédance d'entrée, de l'impédance de sortie et du gain statique pour un ALI idéal.

On étudie tout d'abord la première partie du montage, comprise entre les tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$ sur la figure I-1.

2. Justifier que l'ALI n° 1 fonctionne en régime saturé.

3. Exprimer le potentiel de l'entrée non inverseuse de l'ALI n° 1 en fonction de R_1, R_2, $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

4. En supposant que $u_2(t) = +V_{\text{sat}}$, déterminer la tension seuil U_1^- correspondant au basculement de l'ALI n° 1.

5. En supposant que $u_2(t) = -V_{\text{sat}}$, déterminer la tension seuil U_1^+ correspondant au basculement de l'ALI n° 1.

On étudie maintenant la seconde partie du montage, comprise entre les tensions $u_2(t)$ et $u_3(t)$ sur la figure I-1.

6. Justifier que l'ALI n° 2 fonctionne en régime linéaire.

7. Montrer que la tension $u_2(t)$ peut s'exprimer sous la forme

$$u_2(t) = -k\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}$$

où k est une constante positive que l'on exprimera en fonction des composants du montage.

On étudie enfin le montage dans son ensemble. On suppose que le potentiel en sortie de l'ALI n° 1 bascule à $+V_{\text{sat}}$ à l'instant $t = 0$. Les tensions vérifient donc $u_2(t = 0^+) = +V_{\text{sat}}$ et $u_3(t = 0^+) = U_1^+$.

8. Déterminer l'expression de la tension $u_3(t)$, tant que l'ALI n° 1 n'a pas basculé, en fonction du temps t, de la tension de saturation V_{sat} et des composants du montage.

9. Exprimer l'instant t_1 où le potentiel en sortie de l'ALI n° 1 bascule à $-V_{\text{sat}}$, en fonction des composants du montage.

10. Déterminer l'expression de la tension $u_3(t)$ après le basculement de l'ALI n° 1 en fonction du temps t_1, de la tension de saturation V_{sat} et des composants du montage.

11. Exprimer l'instant t_2 où le potentiel en sortie de l'ALI n° 1 bascule à nouveau à $+V_{\text{sat}}$, en fonction des composants du montage.

12. Représenter graphiquement l'évolution des tensions $u_2(t)$ et $u_3(t)$ entre les instants $t = 0$ et $t = t_2$.

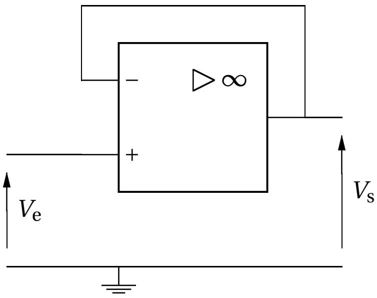
13. Exprimer la période T des oscillations de ces tensions en fonction des composants du montage.

Partie II — Généralités sur les ALI — banque PT 2022

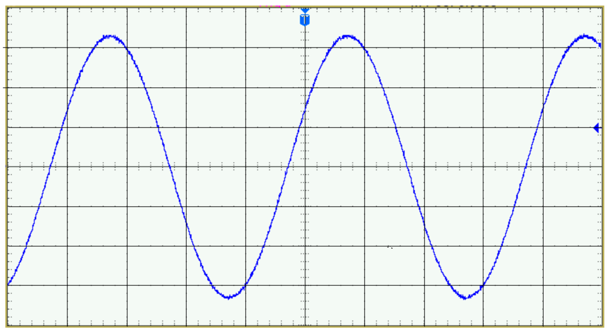
Dans cette partie, on considère un ALI alimenté en $+15/-15$ V par une alimentation à point milieu. On admettra que les tensions de saturation haute et basse sont de ± 15 V.

1. Représenter la tension de sortie en fonction de la tension différentielle d'entrée, en indiquant clairement les ordres de grandeur considérés (on indiquera la partie correspondant au régime linéaire et celle correspondant au régime saturé).

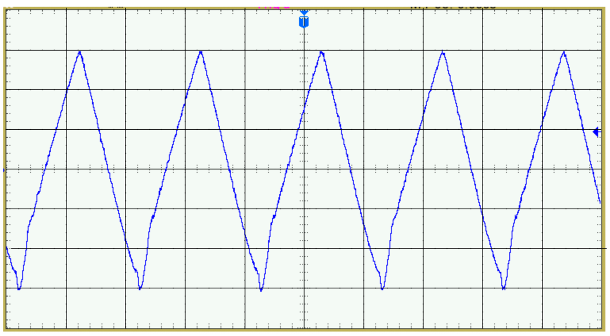
2. On s'intéresse au montage représenté ci-dessous. Montrer que $V_s = V_e$. Comment s'appelle ce montage? Quel est son intérêt? On considérera le gain de l'ALI comme infini.



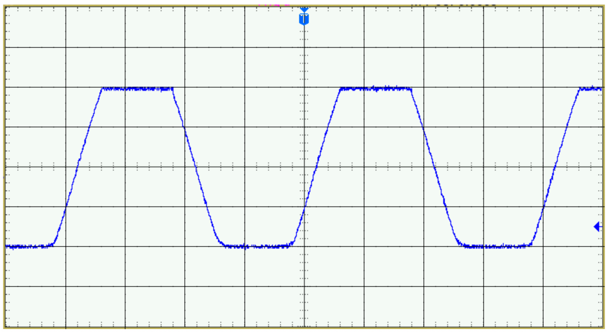
3. On alimente ce montage avec en entrée la tension dont l'oscillogramme est donné ci-dessous. Les réglages sont 2 V/div et 100 µs/div; quelles sont les caractéristiques de cette tension?
Peut-on raisonnablement penser observer la même chose en sortie?



4. Toutes choses égales par ailleurs, on augmente la fréquence et on observe en sortie la tension ci-dessous. Les réglages sont 2 V/div et 1 µs/div. Quelle caractéristique de l'ALI est ainsi mise en évidence? Évaluer sa valeur numérique.



5. On revient à la fréquence de la question 3, et on ajoute une résistance de charge $R_0 = 50\ \Omega$ entre la sortie et la masse. Les réglages sont 2 V/div et 100 µs/div. Quelle caractéristique de l'ALI est ainsi mise en évidence ? Évaluer sa valeur numérique.



6. Donner le schéma d'un montage amplificateur non inverseur utilisant un ALI et deux résistances. Établir l'expression du gain de ce montage.

7. Proposer des valeurs pour les résistances pour avoir des gains de 10, 100 et 1000. Jusqu'à quelle valeur de gain peut-on aller avec un tel montage avec une tension d'entrée continue ? Avec une tension d'entrée sinusoïdale de fréquence 10 kHz ? De simples ordres de grandeur sont attendus.

8. On alimente ce montage, en prenant un gain de 10, avec la tension d'entrée de la question 3. Dessiner l'allure de la tension attendue au sortie.

Partie III — Oscillateur à tubes — Mines MPI 2024

On considère le montage de la figure III-1 comportant un générateur idéal de tension constante E_0, un résistor de résistance R, un condensateur de capacité C et un dipôle $\mathcal{D}$ assimilé à un résistor de résistance $R_L = \alpha R$.

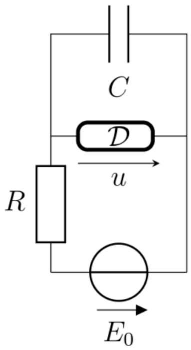


FIGURE III-1 – Circuit

1 — Une première équation d'évolution

Dans un tel circuit linéaire, l'équation d'évolution de $u(t)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants dont la solution comporte d'une part une solution de l'équation homogène $u_h(t)$ et d'autre part une solution particulière $u_p(t)$.

1. Laquelle de ces solutions correspond au régime transitoire ?
Sa forme générale dépend-elle de E_0 ?
Proposer un schéma simplifié et en déduire, en effectuant le moins de calculs possible, qu'il s'agit d'une solution caractérisée par une constante de temps τ_α que l'on explicitera en fonction, de $\tau_0 = RC$ et de α.

2. À quelle condition l'autre solution correspond-elle au régime permanent ?
Sa forme générale dépend-elle de C ? des résistances R et R_L ?
Proposer un schéma simplifié et en déduire simplement l'expression correspondante u_∞ de u en fonction de α et E_0.

2 — Un dipôle à deux états

En réalité, le dipôle $\mathcal{D}$ est une lampe contenant un gaz raréfié qui peut être dans deux états électriques (lampe éteinte ou allumée). Ces deux états correspondent chacun à une valeur de α.
Le comportement électrique de $\mathcal{D}$ diffère selon son état : c'est un assez bon conducteur si elle est allumée, et un assez bon isolant si elle est éteinte.

3. Que peut-on dire *a priori* de α si la lampe est éteinte ? si elle est allumée ?

On réalise le circuit avec $R = 20\ \text{k}\Omega$ et $C = 200\ \mu\text{F}$. Lors du branchement initial du circuit, on admettra que la lampe est éteinte et le condensateur déchargé. Par la suite :

— la lampe reste éteinte tant que la tension à ses bornes vérifie $|u| < U_a$ où $U_a = 90$ V est la tension d'allumage ; dans ce cas elle a pour résistance $R_e \gg R$;

— une fois allumée, la lampe a pour résistance $R_a \approx 1\ \mathrm{k\Omega}$; elle reste allumée sauf si la tension à ses bornes diminue trop et elle va donc s'éteindre dès lors que $|u| < U_e$ où $U_e = 70$ V est la tension d'extinction.

4. Exprimer et calculer τ_α dans les deux régimes, successivement lampe éteinte puis allumée.

5. Exprimer la limite $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$ si la lampe ne s'allume jamais ; puis si elle reste allumée.

En déduire que le système oscille seulement si $E_0 > 0$ est compris dans un intervalle que l'on déterminera. Est-ce le cas avec $E_0 = 120$ V, valeur choisie dans la suite ?

Ces oscillations seront-elles observables à lœil ?

3 — Étude numérique du régime d'oscillation

On propose une étude numérique des oscillations au moyen d'un algorithme dérivé de la méthode d'Euler explicite pour l'étude de $u(t)$; le passage de t à $t+\delta t$ se fait au moyen de la fonction `Next` :

```
1 def Next(u, al, dt):
2         i = (E - u)/R
3         if al:
4                 al = u >= Ue
5         else:
6                 al = u > Ua
7         u += dt*(i - al*u/Ra)/C
8         return u, al
```

6. Quelle est la signification de la variable logique `al` ?

Quel est l'objectif des lignes 3 à 6 ?

Justifier, au moyen d'un schéma électrique, la ligne 7.

On propose enfin de tracer l'allure de la courbe représentative de $u(t)$ au moyen du code ci-après :

```
E = 120.0
R = 2.0E-6
C = 200.0E-6
Ua = 90.0
Ue = 70.0
Ra = 1.0E3
tmax = 20.0

def Etude(tmax, N, u0, all0):
        h = tmax/N
        t, u, all0 = 0, u0, all0
        LT = LU =[]
        for k in range(N):
                LT.append(t)
                LU.append(u)
                t = t + h
                U, all = Next(u, all, h)
        pl.figure()
        pl.plot(LT,LU)
        pl.show()
```

suivi de l'exécution des lignes :

```
import matplotlib.pyplot as pl
Etude(tmax, 500, 0, False)
```

7. Le tracé sera-t-il satisfaisant ?

Si non, quelle(s) modification(s) proposez-vous ?

Après rectification si nécessaire, *l'allure* du tracé obtenu est représenté figure III-2.

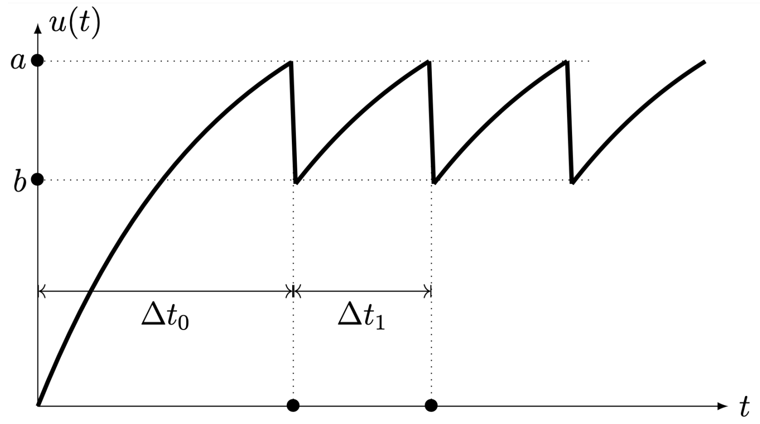


FIGURE III-2 – Tracé de $u(t)$ par la méthode numérique proposée

8. Sur la figure III-2, identifier les phases où la lampe est allumée et celles où elle est éteinte; quelle est la valeur de a?
La valeur de b dépend en fait du paramètre `N` de la fonction `Etude`; avec `N = 500` on trouve par exemple $b \approx 59$ V. Expliquer pourquoi cette valeur reste inférieure à 70 V.

Partie IV — Analyse de Fourier et échantillonnage — Mines PSI 2022

On note $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ un signal sinusoïdal de fréquence f_0 que l'on cherche à numériser. Nous étudierons plus particulièrement l'une des étapes de la numérisation appelée l'échantillonnage, qui consiste à prélever un ensemble de valeurs prises à des instants discrets.

1. On s'intéresse tout d'abord à l'opération consistant à multiplier le signal $x(t)$ par la fonction $p(t) = \cos(2\pi f_1 t)$, de fréquence $f_1 > f_0$.
Représenter sur un même diagramme les spectres respectifs des signaux $x(t)$ et $x_e(t) = x(t) \times p(t)$.

On cherche maintenant à échantillonner le signal $x(t)$. Pour cela, on introduit la fonction périodique $w(t)$ représentée sur la figure IV-1. On considère que $T \ll T_e$, ainsi le signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ n'est différent de zéro que sur des intervalles de temps très courts assimilables à des instants discrets $t_k = kT_e$ pour $k \in \mathbf{Z}$. Pour chacun de ces instants, on a $x_e(t) = x(t_k)$.

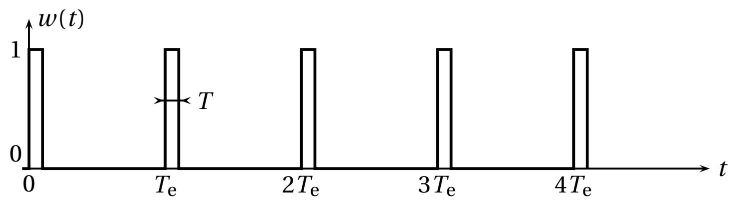


FIGURE IV-1 – Signal d'échantillonnage

On dit que $x_e(t)$ constitue un échantillonnage du signal $x(t)$ et on appelle fréquence d'échantillonnage la grandeur $f_e = \dfrac{1}{T_e}$.

2. Représenter le signal $x_e(t)$ pour $f_e = 2f_0$, $f_e = 4f_0$ et $f_e = \dfrac{4}{3}f_0$. Montrer qualitativement que, dans l'un des cas, le signal échantillonné n'est pas représentatif du signal analogique de départ.

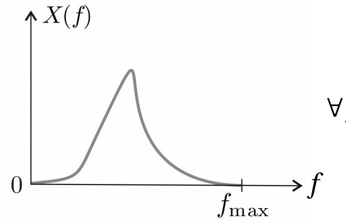
3. Du fait de sa périodicité, le signal $w(t)$ est décomposable en série de Fourier, de la forme

$$w(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos(2\pi k f_e t).$$

Représenter, par analogie avec la question 1, le spectre du signal $x_e(t) = x(t) \times w(t)$ pour $f_e = 4f_0$ puis $f_e = \dfrac{4}{3}f_0$ (on se limitera aux valeurs de k telles que $0 \leqslant k \leqslant 2$).
Montrer que, dans l'un des cas, les motifs fréquentiels se chevauchent (on parle de repliement de spectre). En considérant seulement la fenêtre fréquentielle $[0, f_e]$, indiquer autour de quelle fréquence a lieu le repliement.

4. En s'inspirant des questions 2 et 3, proposer une relation entre f_e et f_0 permettant d'assurer un bon échantillonnage du signal $x(t)$. Cette relation est appelée « critère de Shannon-Nyquist ».

5. On considère dorénavant un signal temporel $X(yt)$ dont le spectre en fréquence $X(f)$, représenté sur la figure IV-2, fait apparaître une fréquence maximale $f_{\max}$. Que devient le critère de Shannon-Nyquist dans cette situation ? Représenter le spectre du signal échantillonné selon que ce critère soit ou non vérifié. Pour un signal sonore audible, proposer des valeurs raisonnables de $f_{\max}$ et f_e.



$$\forall f \geqslant f_{\max}, \quad X(f) = 0$$

FIGURE IV-2 – Signal d'échantillonnage

6. Sur l'exemple de la question précédente montrer que, lorsque le critère de Shannon-Nyquist est vérifié, un filtrage approprié permet de retrouver le signal analogique de départ. On donnera les caractéristiques du filtre à utiliser.

7. La durée de l'enregistrement d'un CD audio est $\Delta t = 75$ min. L'échantillonnage se fait à une fréquence $f_e = 44{,}1$ kHz et avec une résolution de 16 bits. De plus, l'enregistrement est fait sur deux voies séparées en stéréo. Déterminer la taille minimale du fichier musical. On donnera le résultat en mégaoctets (Mo), un octet correspondant à 8 bits.