

## Partie I — Conditionnement d'un pluviomètre (Banque PT 2024)

1. Pour un ALI idéal :

- les courants de polarisation sont nuls ;
- l'impédance d'entrée est infinie ;
- l'impédance de sortie est nulle ;
- le gain statique est infini.

► On peut considérer un ALI idéal de gain non infini ; son gain statique est alors de l'ordre de  $10^6$ .

2. La rétroaction est réalisée sur l'entrée non inverseuse et il n'y a aucune rétroaction sur l'entrée inverseuse ; l'ALI n° 1 fonctionne donc en **régime saturé**.

3. La loi des nœuds en terme de potentiel écrite pour l'entrée non inverseuse donne

$$\frac{u_1 - u_+}{R_1} + \frac{u_2 - u_+}{R_2} = 0$$

soit

$$R_2 u_1 + R_1 u_2 = (R_1 + R_2) u_+ .$$

On a donc

$$u_-(t) = \frac{R_2 u_1(t) + R_1 u_2(t)}{R_1 + R_2} .$$

4. On a

$$\varepsilon = u_+ - u_- = u_+ .$$

En saturation positive, on a donc

$$\varepsilon = \frac{R_2 u_1 + R_1 V_{\text{sat}}}{R_1 + R_2} \quad \text{avec } \varepsilon > 0 .$$

L'ALI reste donc en saturation basse si

$$R_2 u_1 + R_1 V_{\text{sat}} > 0$$

soit

$$u_1 > U_1^- \quad \text{avec } U_1^- = -\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} .$$

5. Avec  $u_2(t) = -V_{\text{sat}}$ , l'ALI reste en saturation négative tant que

$$u_+ = \frac{R_2 u_1 - R_1 V_{\text{sat}}}{R_1 + R_2} < 0$$

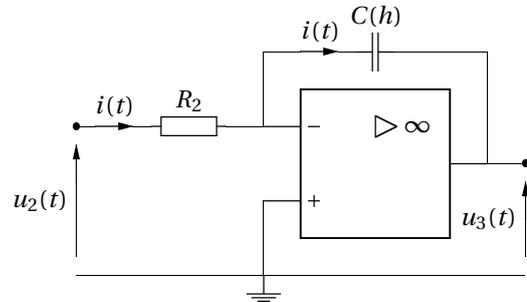
soit

$$u_1 < U_1^+ \quad \text{avec } U_1^+ = \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} .$$

6. La rétroaction se faisant sur l'entrée inverseuse, l'ALI n° 2 fonctionne en régime linéaire.

► En fait, le fonctionnement linéaire est envisageable, sous réserve que les amplitudes des signaux ne soient pas trop importantes.

7. Introduisons l'intensité traversant les dipôles :



En régime linéaire, on a  $u_- = u_+ = 0$ , d'où

$$u_2(t) = R_2 i(t) \quad \text{et} \quad i(t) = -C \frac{du_3}{dt} .$$

On a donc

$$u_2(t) = -R_2 C \frac{du_3}{dt} ,$$

soit

$$u_2(t) = -k \frac{du_3}{dt} \quad \text{avec } k = R_2 C .$$

8. On a avec les conditions données

$$\frac{du_3}{dt} = -\frac{V_{\text{sat}}}{R_2 C}$$

d'où

$$u_3(t) = u_3(0^+) - \frac{V_{\text{sat}}}{R_2 C} t .$$

Avec

$$u_3(0^+) = U_1^+ = \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$$

on en déduit

$$u_3(t) = \left( \frac{R_1}{R_2} - \frac{t}{R_2 C} \right) V_{\text{sat}} .$$

9. La tension  $u_3(t)$  bascule à  $-V_{\text{sat}}$  à l'instant  $t_1$  tel que  $u_3(t_1) = U_1^-$ , soit

$$\left( \frac{R_1}{R_2} - \frac{t_1}{R_2 C} \right) V_{\text{sat}} = -\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$$

soit

$$t_1 = 2 \frac{R_1}{R_2} R_2 C .$$

L'ALI n° 1 bascule à l'instant

$$t_1 = 2R_1 C .$$

10. Après le basculement de l'ALI n° 1, on a

$$\frac{du_3}{dt} = \frac{V_{\text{sat}}}{R_2 C},$$

$$t_2 = 4R_1 C.$$

d'où

$$u_3(t) = u_3(t_1) + \frac{V_{\text{sat}}}{R_2 C} (t - t_1).$$

On a

$$u_3(t_1) = \left( \frac{R_1}{R_2} - \frac{t_1}{R_2 C} \right) V_{\text{sat}}$$

d'où

$$u_3(t) = \left( \frac{R_1}{R_2} - \frac{t_1}{R_2 C} \right) V_{\text{sat}} + \frac{V_{\text{sat}}}{R_2 C} (t - t_1).$$

On a donc

$$u_3(t) = \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} + \frac{V_{\text{sat}}}{R_2 C} (t - 2t_1).$$

11. Le basculement suivant se produit à l'instant  $t_2$  tel que

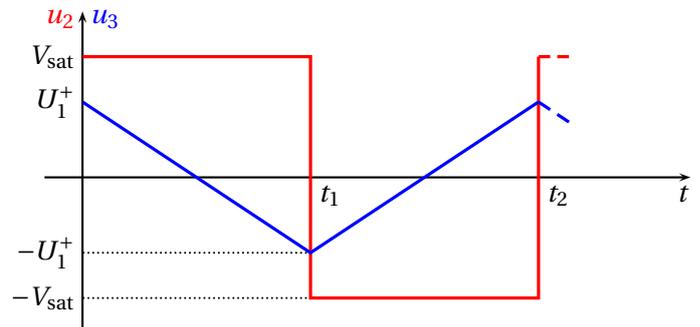
$$u_3(t_2) = U_1^+ = \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}.$$

On a alors

$$\frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}} + \frac{V_{\text{sat}}}{R_2 C} (t_2 - 2t_1) = \frac{R_1}{R_2} V_{\text{sat}}$$

d'où  $t_2 = 2t_1$ , soit

12. Évolution des tensions :

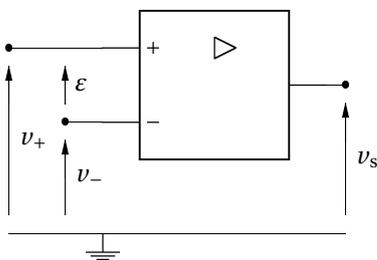


13. À l'instant  $t_2$ , le système se trouve dans la même configuration qu'à l'instant  $t = 0$ ; l'évolution reprend donc à l'identique, et le système évolue périodiquement avec une période  $T = t_2$ , soit  $T = 4R_1 C$ .

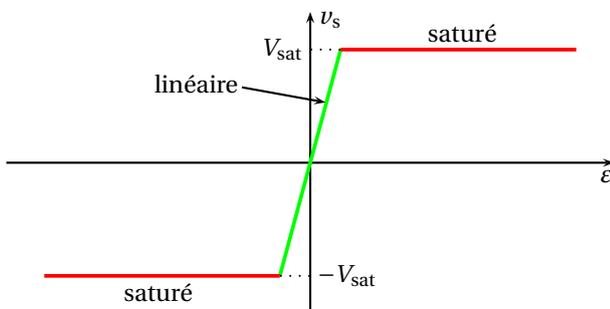
La période est donc bien proportionnelle à  $C(h)$ , donc fonction affine de la hauteur  $h$  de liquide.

## Partie II — Généralités sur les ALI — banque PT 2022

1. La tension différentielle d'entrée  $\varepsilon$  est définie par



La tension de sortie dépend de la tension différentielle d'entrée selon



On a ici  $V_{\text{sat}} = 15 \text{ V}$ .

Le régime linéaire, qui correspond à  $-V_{\text{sat}} < v_s < V_{\text{sat}}$  est caractérisé par  $v_s = A_0 \varepsilon$ , avec  $A_0 \approx 10^5$ .

Dans le cas où on considère le gain de l'ALI comme infini, le régime linéaire est caractérisé par  $\varepsilon = 0$ , pour  $-V_{\text{sat}} < v_s < V_{\text{sat}}$ .

Le régime saturé est tel que

$$v_s = \begin{cases} +V_{\text{sat}} & \text{si } \varepsilon > 0 \\ -V_{\text{sat}} & \text{si } \varepsilon < 0. \end{cases}$$

2. La rétroaction sur la borne négative assure un fonctionnement de l'ALI en régime linéaire.

On a donc  $\varepsilon = 0$ .

On en déduit  $V_s = V_- = V_+ = V_e$ . On a bien  $V_s = V_e$ .

Ce montage s'appelle le montage **suiveur**.

Il est caractérisé par :

**une impédance d'entrée infinie** : quand on le branche à la sortie d'un circuit, le comportement du circuit est identique à celui en sortie ouverte ;

**une impédance de sortie nulle** : la tension de sortie du suiveur n'est pas modifiée par le branchement d'un circuit en sortie.

Le suiveur permet de réaliser une **adaptation d'impédance** entre deux circuits successifs.

3. L'amplitude de la tension de sortie est de 3,3 divisions, soit 6,6 V, inférieure à  $V_{\text{sat}}$  : l'ALI fonctionne en **régime linéaire**.

La période du signal est de  $400 \mu\text{s}$ , soit une fréquence  $f = 2,5 \text{ kHz}$ . À cette fréquence, la limitation due à la vitesse de balayage de l'ALI ne se fait pas sentir.

**On peut raisonnablement penser observer la même tension en sortie.**

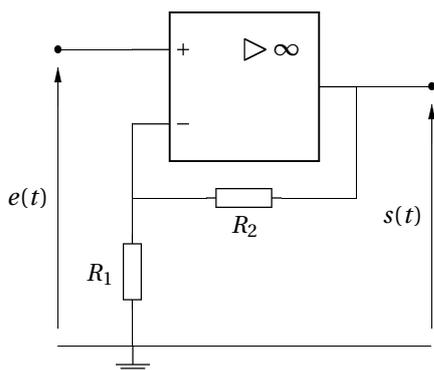
4. On observe une limitation de la pente du signal de sortie, qui a pour valeur environ  $\sigma = 10 \text{ V}/\mu\text{s}$  : c'est la **vitesse de balayage** de l'ALI (ou *slew rate*).

Cette valeur est bien de l'ordre de grandeur attendu pour un ALI réel.

5. La tension de sortie est limitée en amplitude à  $V_{s,\text{max}} = 4 \text{ V}$ . Cette valeur étant inférieure à  $V_{\text{sat}}$ , on n'observe pas le régime saturé de l'ALI, mais la **saturation du courant de sortie** :  $V_{s,\text{max}} = R_0 i_{\text{sat}}$ , d'où  $i_{\text{sat}} = 80 \text{ mA}$ .

Cette valeur est bien de l'ordre de grandeur attendu pour un ALI réel.

6. Amplificateur non inverseur :



En régime linéaire, on a

$$e(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} s(t).$$

Le gain  $G = s(t)/e(t)$  a donc pour expression

$$G = 1 + \frac{R_2}{R_1}.$$

7. Propositions de résistances :

gain $G$	$R_1$	$R_2$
10	1 k $\Omega$	9 k $\Omega$
100	1 k $\Omega$	90 k $\Omega$
1000	1 k $\Omega$	900 k $\Omega$

Avec une tension continue, le gain est limité par le gain statique de l'ALI, soit  $A_0 \approx 10^5$ . On peut donc prendre  $G < 10^5$ .

Avec une tension variable, il faut que le signal reste dans la bande passante  $[0, f_c]$  du montage. En notant  $A_0 \approx 10^5$  le gain statique de l'ALI et  $f_0 \approx 10 \text{ Hz}$  sa fréquence de coupure en boucle ouverte, la conservation du produit gain  $\times$  bande passante conduit à

$$G f_c = A_0 f_0.$$

Il faut une fréquence de signal suffisamment inférieure à la fréquence de coupure  $f_c$ . En prenant  $f < f_c/10$ , on obtient

$$f < \frac{A_0 f_0}{10G}$$

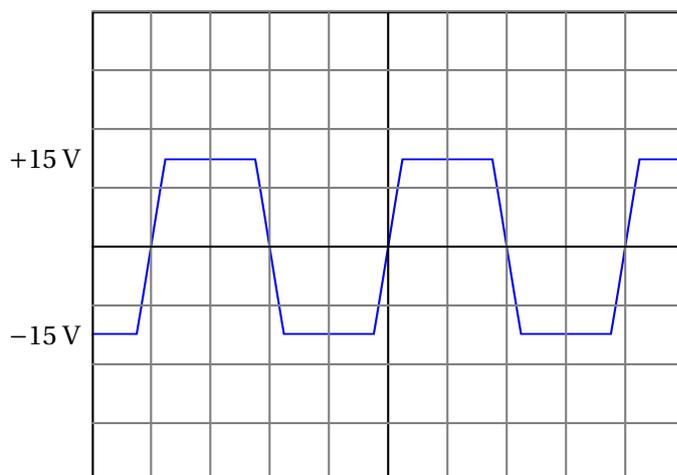
d'où

$$G < \frac{A_0 f_0}{10f} = \frac{10^5 \times 10}{10 \times 10 \times 10^3}$$

soit  $G < 10$ .

8. La tension d'entrée a pour amplitude  $E = 6,6 \text{ V}$ .

Avec un gain  $G = 10$ , on aurait une tension de sortie sinusoïdale d'amplitude  $S = GE = 66 \text{ V}$ . Il y aura donc saturation de l'ALI : la tension de sortie est une « sinusoïde », tronquée par une saturation à  $\pm V_{\text{sat}} = \pm 15 \text{ V}$ .



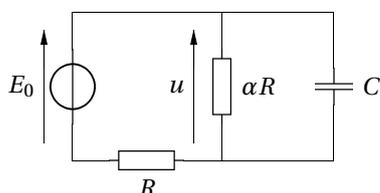
## Partie III — Oscillateur à tubes — Mines MPI 2024

### 1 — Une première équation d'évolution

1. Le régime transitoire est décrit par la **solution de l'équation homogène**  $u_h(t)$ .

Sa forme générale est **indépendante de  $E_0$** .

Le schéma équivalent du circuit est



On peut considérer un pont diviseur de tension entre  $R$  et  $\alpha R \parallel C$ , d'où en notation complexe

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \frac{\underline{Z}}{R + \underline{Z}} \underline{e} = \frac{1}{1 + R \underline{Y}} \underline{e} = \frac{1}{1 + R \left( \frac{1}{\alpha R} + jC\omega \right)} \underline{e} \\ &= \frac{\frac{\alpha}{1+\alpha}}{1 + j \frac{\alpha R}{1+\alpha} C\omega} \underline{e}. \end{aligned}$$

Le dénominateur décrit le régime libre en passant à l'équation différentielle. On en déduit le temps caractéristique

téristique de ce système du premier ordre :

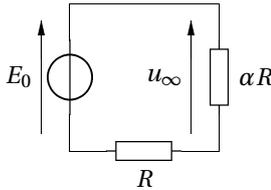
$$\tau_\alpha = \frac{\alpha}{1 + \alpha} \tau_0 \quad \text{avec} \quad \tau_0 = RC .$$

2. La solution particulière correspond au régime permanent si elle est de la même nature que le second membre, c'est-à-dire ici **si elle est constante** (la tension  $E_0$  étant constante).

En régime continu établi, le condensateur est équivalent à un condensateur ouvert, quelle que soit la valeur de  $C$ . La forme générale de la solution particulière, qui décrit le régime établi, ne dépend donc pas de  $C$ .

Elle dépend en revanche *a priori* de  $R$  et  $R_L$ .

En régime continu établi, le circuit est équivalent à



Le relation du pont diviseur de tension conduit à

$$u_\infty = \frac{\alpha}{1 + \alpha} E_0 .$$

## 2 — Un dipôle à deux états

3. La **lampe éteinte** étant un assez bon isolant, sa résistance est élevée. On a donc  $\alpha_e$  élevé .

La **lampe allumée** étant un assez bon conducteur, sa résistance est faible. On a donc  $\alpha_a$  faible .

En particulier, on a  $\alpha_a \ll \alpha_e$  .

4. Quand la lampe est éteinte, on a  $R_e \gg R$ , soit  $\alpha_e \gg 1$ . L'expression établie à la question 1 devient alors

$$\tau_e = \tau_0 = RC .$$

On calcule  $\tau_e = 4 \text{ s}$  .

Quand la lampe est allumée, on a  $R_a \approx \frac{R}{20}$ , soit  $\alpha_a \approx 0,05$ .

On a alors  $\frac{\alpha_a}{1 + \alpha_a} \approx 0,05$  et  $\tau_a = 0,05RC$  .

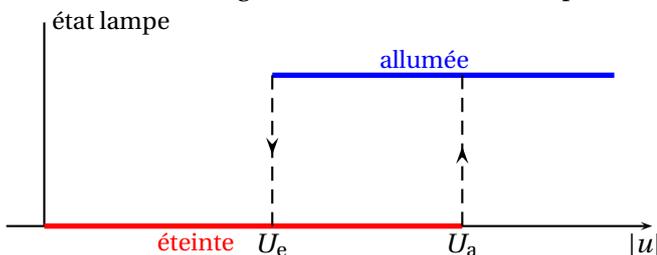
On calcule  $\tau_a = 0,2 \text{ s}$  .

5. La limite  $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t)$  est donnée par l'expression établie à la question 2, en prenant la valeur de  $\alpha$  correspondante.

Si la lampe ne s'allume jamais, on a  $u_{\infty,e} = E_0$  .

Si la lampe reste allumée, on a  $u_{\infty,a} = 0,05E_0$  .

Le système présente un cycle d'hystérésis du fait des conditions d'allumage et d'extinction de la lampe.



Pour le le système oscille, il faut :

- que la tension en régime stationnaire dans l'état éteint soit supérieure au seuil  $U_a$  pour basculer vers l'état allumé, soit  $u_{\infty,e} > U_a$ ;
- que la tension en régime stationnaire dans l'état allumé soit inférieure au seuil  $U_e$  pour basculer vers l'état éteint, soit  $u_{\infty,a} < U_e$ .

Il faut donc

$$E_0 > 90 \text{ V} \quad \text{et} \quad 0,05E_0 < 70 \text{ V}$$

soit

$$90 \text{ V} < E_0 < 1400 \text{ V} .$$

Le cas avec  $E_0 = 120 \text{ V}$  permet des oscillations.

On a vu que les durées caractéristiques des états éteint et allumé sont  $\tau_e = 4 \text{ s}$  et  $\tau_a = 0,2 \text{ s}$ . Elles sont supérieures au temps de réponse de l'œil qui est de l'ordre de  $0,1 \text{ s}$  : **les oscillations seront observables à l'œil**.

## 3 — Étude numérique du régime d'oscillation

6. La variable logique  $a1$  décrit l'état de la lampe : True si la lampe est allumée, False si elle est éteinte.

Les lignes 3 à 6 permettent de définir l'état de la lampe en fonction de son état antérieur (principe de l'hystérésis) :

- si la lampe est allumée (ligne 3), alors elle reste allumée si  $u$  est supérieure à  $U_e$ , et devient éteinte sinon (ligne 4);
- si la lampe est éteinte (ligne 4), alors elle devient allumée si  $u$  est supérieure à  $U_e$ , et reste éteinte sinon (ligne 5).

La ligne 7 correspond à l'itération du schéma d'Euler, soit

$$u(t + dt) = u(t) + dt \frac{i - a1 \times u}{C} .$$

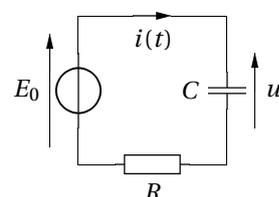
**Quand la lampe est éteinte**, la variable logique  $a1$  vaut False qui équivaut à la valeur 0. On a donc

$$u(t + dt) = u(t) + dt \frac{i}{C}$$

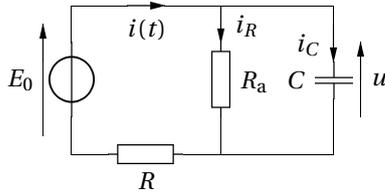
qui est le schéma d'Euler correspondant à

$$i(t) = C \frac{du}{dt} .$$

Comme  $R_e \gg R$  dans cette situation, le schéma électrique est équivalent à



Quand la lampe est allumée, le schéma du circuit est



On a donc

$$i_C(t) = i(t) - i_R(t)$$

soit

$$C \frac{du}{dt} = i(t) - \frac{u(t)}{R_a}$$

Le schéma d'Euler correspondant est

$$\frac{u(t+dt) - u(t)}{dt} = C \left( i - \frac{u}{R_a} \right)$$

Dans l'état allumé de la lampe, la variable logique `al` vaut `True` qui équivaut à la valeur 1. On retrouve alors l'expression donnée par la ligne 7 du code.

7. La ligne 12 du code est problématique : écrire `LT = LU = []` fait pointer les variables `LT` et `LU` vers la même adresse mémoire. Ainsi une modification d'une des deux listes se répercute sur l'autre liste; elles ne sont pas indépendantes.

Il faudrait écrire par exemple

```
LT, LU = [], []
```

8. En faisant le lien avec le cycle d'hystérésis tracé à la question 5, on identifie les phases :

**Lampe éteinte :** phases où  $u(t)$  est croissante.

**Lampe allumée :** phases où  $u(t)$  est décroissante.

En déduit que `a = 90 V`.

Le code de la ligne 12 décrit correctement l'évolution quand la lampe est éteinte car le schéma d'Euler n'est en fait pas utilisé (il n'y a pas de dérivée dans l'expression du courant).

Quand la lampe est allumée, la formule du code fait appel au schéma d'Euler, qui est entaché d'imprécision si le pas de calcul n'est pas assez petit, c'est-à-dire ici si `N` n'est pas assez grand. La phase de décroissance de  $u(t)$  n'est alors pas décrite correctement, et la valeur de `b` obtenue à la fin de cette phase est incorrecte.

➤ Pour que le schéma d'Euler soit correct, il faut que le pas  $\delta t$  soit petit devant le temps caractéristique de la variable, soit  $\delta t \ll R_a C$ .

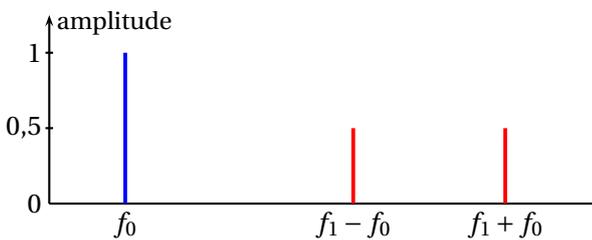
On a ici  $R_a C = 0,2$  s et  $\delta t = \frac{t_{\max}}{N} = 0,04$  s. On voit que  $\delta t$  n'est pas très petit devant  $R_a C$ .

## Partie IV — Analyse de Fourier et échantillonnage — Mines PSI 2022

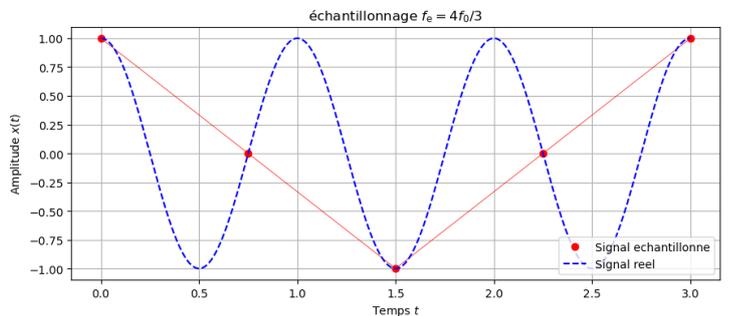
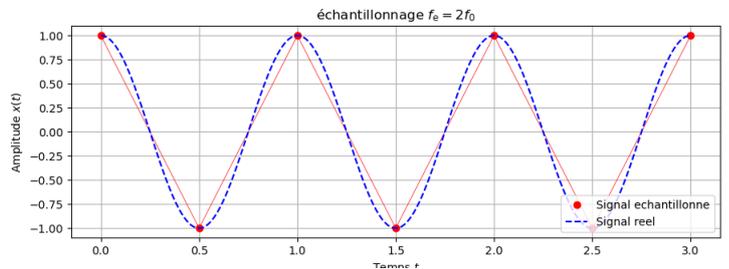
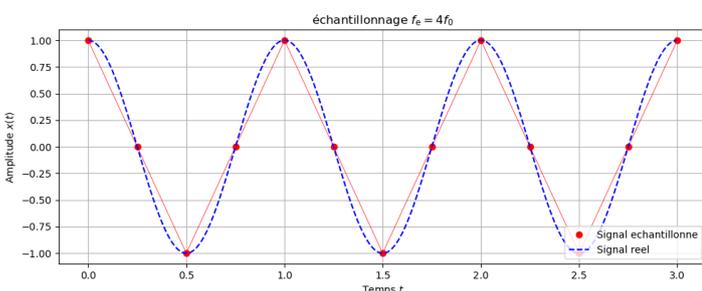
1. On a

$$\begin{aligned} x_e(t) &= \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_1 t) \\ &= \frac{1}{2} \cos[2\pi(f_1 - f_0)t] + \frac{1}{2} \cos[2\pi(f_1 + f_0)t] \end{aligned}$$

On en déduit les spectres des deux signaux :



2. On représente le signal  $x(t)$  et le signal échantillonné :



Dans le cas  $f_e = \frac{4}{3}f_0$ , le signal échantillonné n'est pas représentatif du signal analogique de départ : il n'a pas la même fréquence.

3. On développe les produits de cosinus :

$$\begin{aligned} x_e(t) &= a_0 \cos(2\pi f_0 t) \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} \left[ \frac{a_k}{2} \cos[2\pi(kf_e - f_0)t] + \frac{a_k}{2} \cos[2\pi(kf_e + f_0)t] \right] \end{aligned}$$

En se limitant à  $0 \leq k \leq 2$ , on a

$$x_e(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t) + \frac{a_1}{2} \cos[2\pi(f_e - f_0)t] + \frac{a_1}{2} \cos[2\pi(f_e + f_0)t] + \frac{a_2}{2} \cos[2\pi(2f_e - f_0)t] + \frac{a_2}{2} \cos[2\pi(2f_e + f_0)t]$$

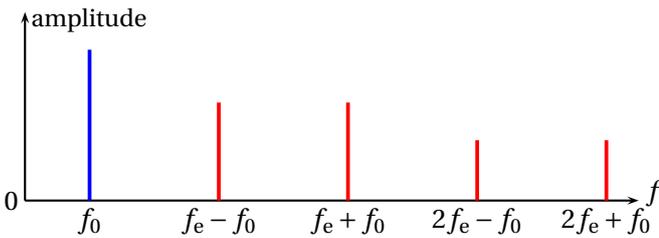
**Cas  $f_e = 4f_0$**

On a alors

$$x_e(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t) + \frac{a_1}{2} \cos[2\pi \times 3f_0 t] + \frac{a_1}{2} \cos[2\pi \times 5f_0 t] + \frac{a_2}{2} \cos[2\pi \times 7f_0 t] + \frac{a_2}{2} \cos[2\pi \times 9f_0 t]$$

Le spectre du signal échantillonné comporte :

- un pic d'amplitude  $a_0$  à la fréquence  $f_0$ ;
- un pic d'amplitude  $a_1/2$  à la fréquence  $3f_0$ ;
- un pic d'amplitude  $a_1/2$  à la fréquence  $5f_0$ ;
- un pic d'amplitude  $a_2/2$  à la fréquence  $7f_0$ ;
- un pic d'amplitude  $a_2/2$  à la fréquence  $9f_0$ .



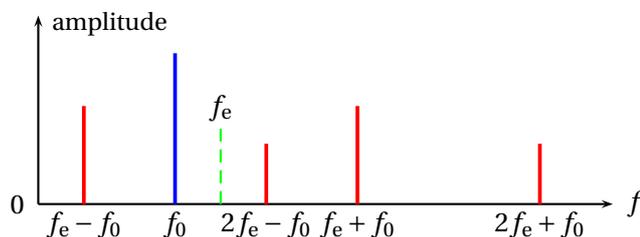
**Cas  $f_e = 4f_0/3$**

On a alors

$$x_e(t) = a_0 \cos(2\pi f_0 t) + \frac{a_1}{2} \cos[2\pi \times \frac{1}{3}f_0 t] + \frac{a_1}{2} \cos[2\pi \times \frac{7}{3}f_0 t] + \frac{a_2}{2} \cos[2\pi \times \frac{5}{3}f_0 t] + \frac{a_2}{2} \cos[2\pi \times \frac{11}{3}f_0 t]$$

Le spectre du signal échantillonné comporte :

- un pic d'amplitude  $a_0$  à la fréquence  $f_0$ ;
- un pic d'amplitude  $a_1/2$  à la fréquence  $\frac{1}{3}f_0$ ;
- un pic d'amplitude  $a_1/2$  à la fréquence  $\frac{7}{3}f_0$ ;
- un pic d'amplitude  $a_2/2$  à la fréquence  $\frac{5}{3}f_0$ ;
- un pic d'amplitude  $a_2/2$  à la fréquence  $\frac{11}{3}f_0$ .



Dans le cas  $f_e = \frac{4}{3}f_0$ , les motifs fréquentiels se chevauchent. En considérant l'intervalle  $[0, f_e]$ , on observe un pic à  $f_e - f_0$  et un pic à  $f_0$ ; ils se correspondent par repliement autour de la fréquence situé au milieu, soit

$$\frac{f_e - f_0 + f_0}{2} = \frac{f_e}{2}.$$

Le repliement a lieu autour de la fréquence  $f_e/2$ .

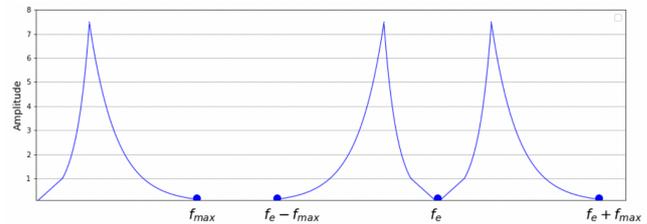
4. À la question 2, on constate que  $f_e = \frac{4}{3}f_0$  ne permet pas de restituer le signal initial.

À la question 3, on observe que ce problème apparaît quand  $f_e - f_0 < f_0$ , soit  $f_e < 2f_0$ .

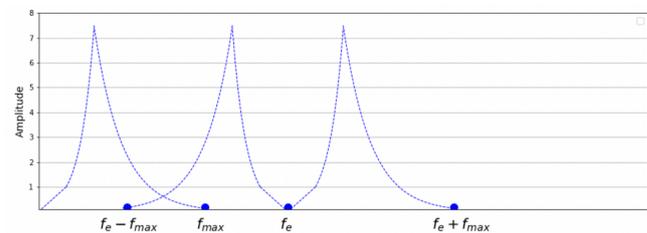
Il faut donc respecter la condition  $f_e - f_0 > f_0$ , soit  $f_e > 2f_0$ .

5. Si la fréquence maximale  $f_{max}$  vérifie le critère de Shannon-Nyquist, soit  $f_e > 2f_{max}$ , toutes les fréquences inférieures à  $f_{max}$  seront correctement restituées, et l'on n'observera pas de repliement de spectre.

L'allure du spectre sera la suivante :



Si la condition  $f_e > 2f_{max}$  n'est pas respectée, on aura chevauchement des spectres :



Un signal sonore audible correspond à des fréquences telles que  $f_{max} = 20 \text{ kHz}$ .

On peut proposer  $f_e = 45 \text{ kHz}$ , qui vérifie la condition de Shannon-Nyquist.

6. Quand le critère de Shannon-Nyquist est respecté, on peut retrouver le signal initial à l'aide d'un **filtre passe-bas**, de fréquence de coupure  $f_c$  telle que  $f_{max} < f_c < f_e - f_{max}$ .

7. L'intervalle entre deux échantillons est  $T_e = \frac{1}{f_e}$ . Sur une durée  $\Delta t$ , le nombre d'échantillons est donc

$$N = \frac{\Delta t}{T_e} = f_e \Delta t.$$

La résolution étant de 16 bit, la taille de l'enregistrement en bits est, sachant qu'il y a deux voies séparées

$$2 \times 16 f_e \Delta t.$$

On en déduit la taille en octets :

soit 794 Mo .

$$\frac{2 \times 16 f_e \Delta t}{8} = \frac{2 \times 16 \times (44,1 \times 10^3) \times 75 \times 60}{8} = 7,94 \times 10^8 \text{ o}$$