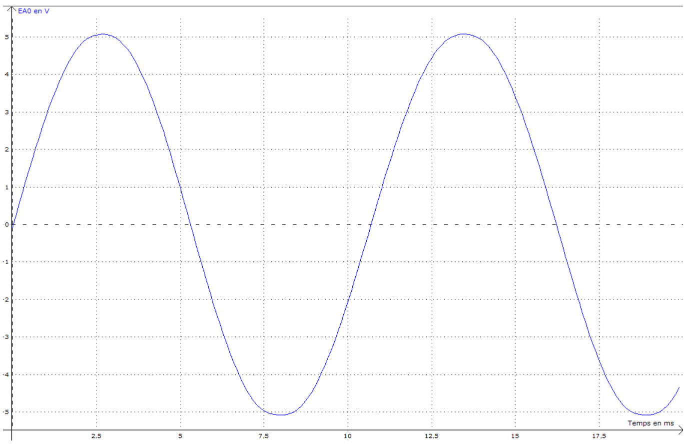
TP n° 4 Pratique de l'analyse spectrale

1 — Utilisation de l'interface Sysam et de Latis-Pro

1.2 Mise en pratique : du bon choix des paramètres

2. GBF : $f = 9{,}90$ kHz, sinusoïde d'amplitude $E = 5$ V.

Acquisition avec les paramètres par défaut :



On observe bien une sinusoïde, mais de fréquence très différente ! On mesure $f' = 93{,}5$ Hz

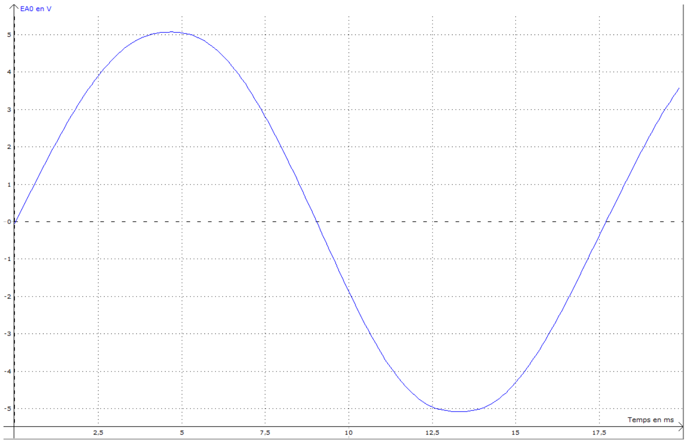
Les paramètres d'acquisition par défaut de LatisPro donnent une fréquence d'échantillonnage

$$F_e = \frac{1}{T_e} = 10{,}0 \text{ kHz}.$$

Le critère de Shannon n'est pas respecté : $F_e < 2f$.

La fréquence du signal observé vaut $F_e - f \approx 0{,}1$ kHz : c'est le phénomène de repliement de spectre.

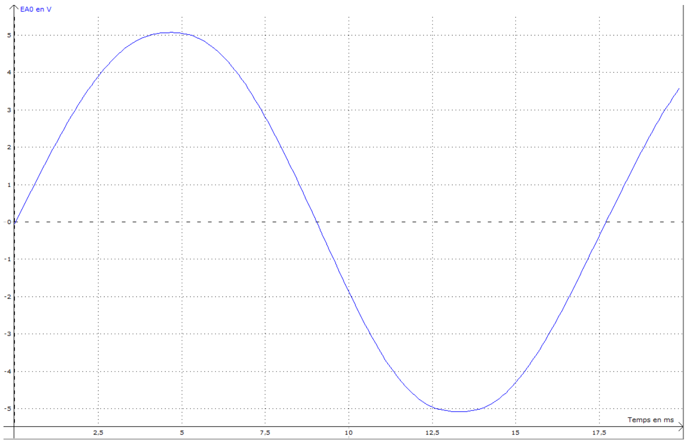
3. Modifions légèrement la fréquence du GBF, en prenant $f = 9{,}94$ kHz.



On observe une sinusoïde de fréquence $f' = 56{,}5$ Hz ; on a toujours $f' = F_e - f$.

4. On choisit $T_e = 1$ µs, ce qui donne $F_e = 1$ MHz $> 2f$ (largement !).

Une durée totale de 0,2 ms permet d'observer deux périodes :

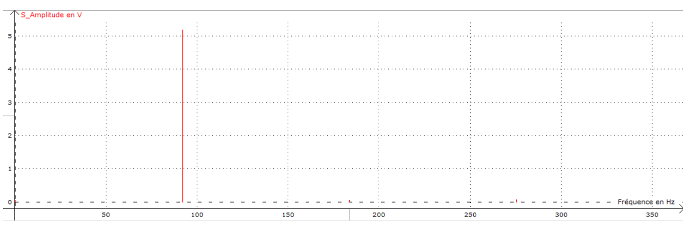


2 — Analyse spectrale numérique

2.1 Mise en pratique

5. Acquisition avec $N = 200$, $T_e = 100$ µs et $T_{tot} = 20$ ms.

Spectre :

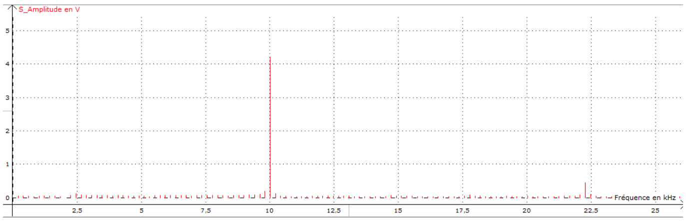


On observe une raie à la fréquence $f' = 92$ Hz.

Cette valeur est en accord avec la représentation temporelle obtenue.

6. On prend comme fréquence d'échantillonnage $F_e = 40$ kHz.

Spectre calculé d'après l'acquisition :



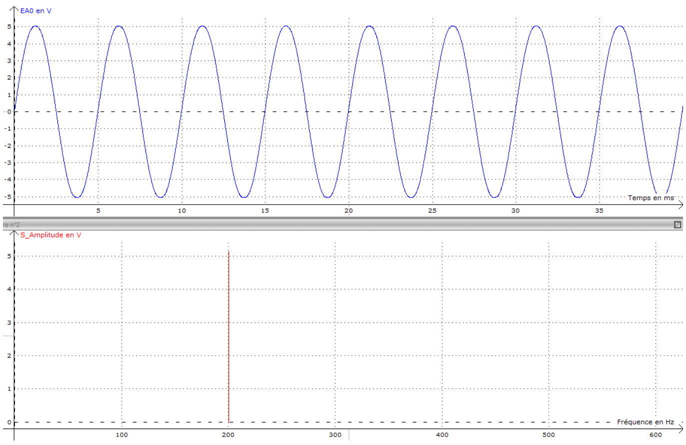
On observe bien une raie à la fréquence du signal $f = 10\,\mathrm{kHz}$.

2.2 Repliement de spectre

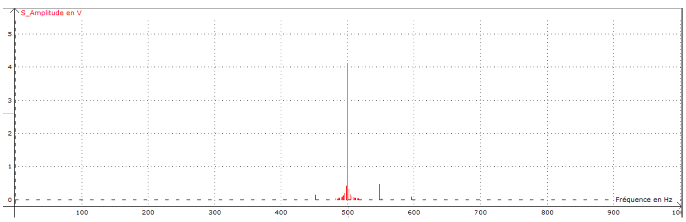
On choisit ici comme paramètres d'acquisition $T_e = 10\,\mu\mathrm{s}$, $N = 4000$ points, ce qui détermine $T_{tot} = 40\,\mathrm{ms}$.
On peut choisir l'intervalle de fréquence sur lequel on représente le spectre dans la rubrique Résultat sur du choix des paramètres avancés de l'analyse de Fourier.

7. Avec $T_e = 10\,\mu\mathrm{s}$, la fréquence d'échantillonnage est $F_e = 100\,\mathrm{kHz}$.

Le signal étant une sinusoïde de fréquence $f = 200\,\mathrm{Hz}$, le critère de Shannon est largement respecté. On obtient le spectre attendu, et une représentation, temporelle fidèle :



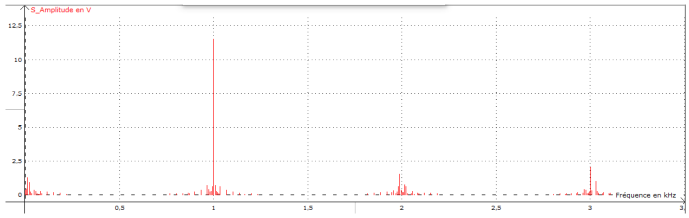
8. Avec $T_e = 500\,\mu\mathrm{s}$, on a $F_e = 2{,}0\,\mathrm{kHz}$.
Si $f = 1{,}5\,\mathrm{kHz}$, on n'a pas $F_e > 2f$.



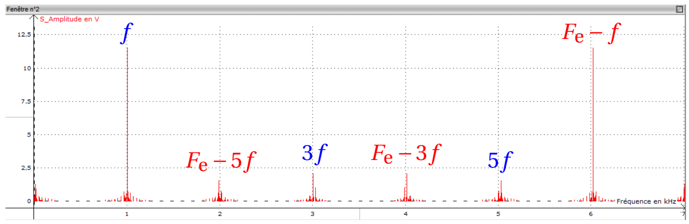
On observe la raie attendu d'après le repliement de spectre, à la fréquence

$$F_e - f = 500\,\mathrm{Hz}.$$

9. Signal carré de fréquence $f = 1{,}0\,\mathrm{kHz}$.
La valeur $T_e = 143\,\mu\mathrm{s}$ correspond à une fréquence d'échantillonnage $F_e = 7\,\mathrm{kHz}$.
On obtient le spectre :

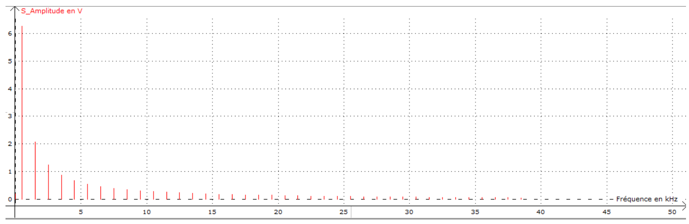


Le signal carré ne doit avoir des composantes que pour les harmoniques impairs. Or on observe une composante à la fréquence $f = 2\,\mathrm{kHz}$. Il s'agit du repliement de l'harmonique de rang 5, de fréquence $f_5 = 5\,\mathrm{kHz}$; il donne naissance à la fréquence « repliée » $F_e - f_5 = 2\,\mathrm{kHz}$. On peut observer le spectre sur $[0, F_e]$ pour mieux comprendre :

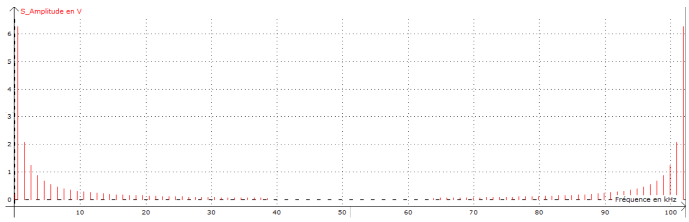


On peut observer le spectre en respectant largement le critère de Shannon :

— pour le signal, $f = 500\,\mathrm{Hz}$;
— pour l'acquisition $T_e = 10\,\mu\mathrm{s}$, soit $F_e = 100\,\mathrm{kHz} = 200f$, et $N = 1000$ points.

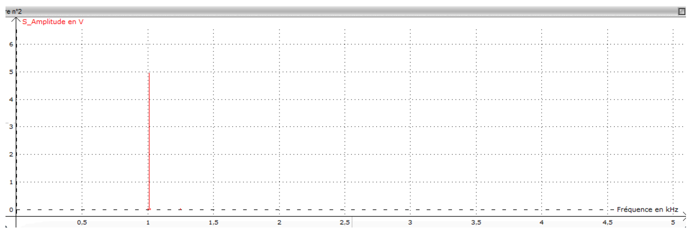


Certes le repliement existe toujours, mais porte sur des harmoniques d'amplitude tellement faible qu'on ne peut l'observer. Sur $[0, F_e]$, le spectre calculé est



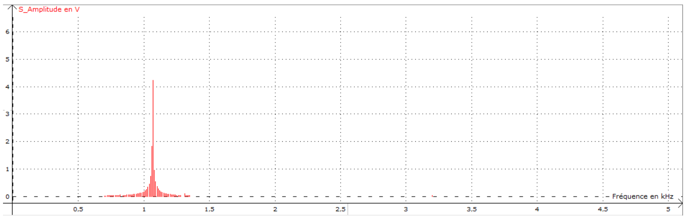
2.3 La fenêtre !

10. Les paramètres d'acquisition sont $T_e = 100\,\mu\mathrm{s}$ (soit $F_e = 10\,\mathrm{kHz}$), et $N = 1000$ points.
Le signal est une sinusoïde de fréquence $f = 1\,\mathrm{kHz}$.
Le spectre calculé est



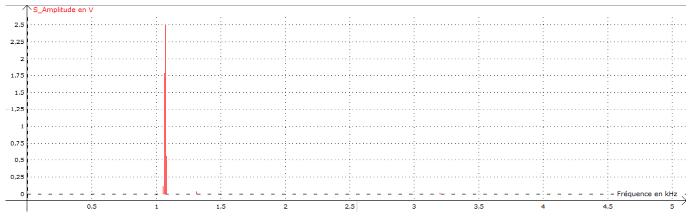
C'est bien le spectre attendu pour un signal sinusoïdal.

11. Si on modifie légèrement la fréquence du signal à la valeur $f = 1067$ Hz, le spectre obtenu est



On n'obtient plus une simple raie comme attendu !
Cette fois, la durée totale d'acquisition $T_{\text{tot}} = NT_{\text{e}}$ n'est plus égale à un nombre entier de périodes.

12. On peut « limiter les dégâts » en appliquant une fenêtre de Hamming avant le calcul du spectre. On obtient alors

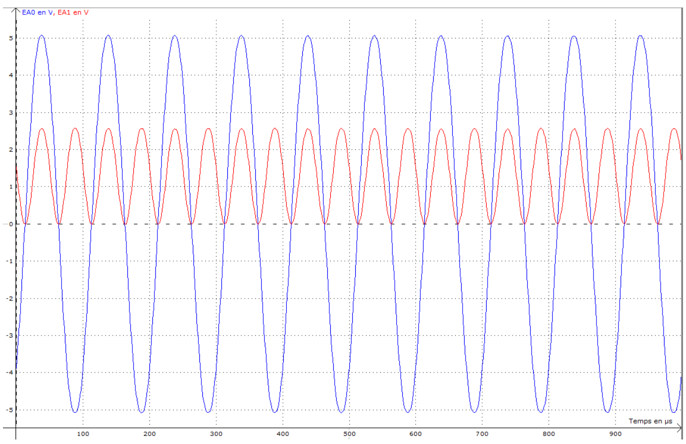


C'est plus proche du spectre attendu.

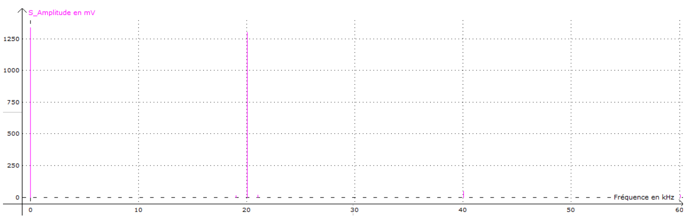
3 — Multiplication de deux signaux

3.1 Multiplication de deux signaux identiques

13. Visualisons les tensions $u(t)$ et $w(t) = u^2(t)/10$:



14. Paramètres : $T_{\text{e}} = 1$ µs et $N = 10000$.
Le calcul du spectre de $w(t)$ donne



Avec $u(t) = U_0 \cos(2\pi f t)$, on a

$$w(t) = \frac{u^2(t)}{10} = \frac{U_0^2}{20}\left(1 + \cos(2\pi 2 f t)\right).$$

On observe bien deux raies :
— une à la fréquence nulle (composante continue) ;
— une à la fréquence $2f = 20$ kHz.

Le montage n'est pas linéaire : les fréquences présentes dans le spectre du signal de sortie sont absentes du signal d'entrée.

15. En mode XY, on observe une parabole, car $X = u(t)$ et $Y = 0{,}1 u^2(t) = 0{,}1 X^2$.
Cette forme est inchangée si l'on prend un signal triangulaire.

16.a) La valeur moyenne de la tension de sortie du multiplieur est

$$\langle w(t) \rangle = \frac{\langle u^2(t) \rangle}{10} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{10}.$$

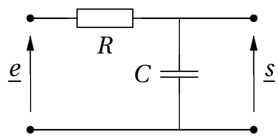
La valeur de $\langle w(t) \rangle$ est donnée par l'amplitude de la composante spectrale de fréquence nulle. On lit

$$\langle w(t) \rangle = 1{,}3 \text{ V}.$$

On en déduit $U_{\text{eff}} = 3{,}6$ V.
La valeur attendue est $U_{\text{eff,th}} = 5/\sqrt{2} = 3{,}5$ V.

➤ Avec 3 chiffres significatifs, on a $U_{\text{eff}} = 3{,}62$ V et $U_{\text{eff,th}} = 3{,}54$ V.

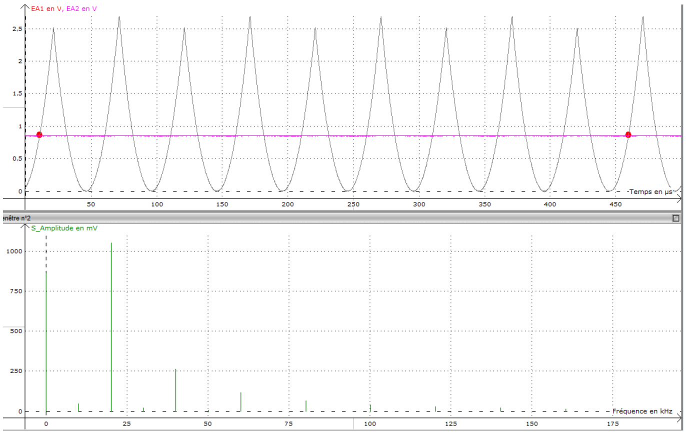
16.b) Il faut utiliser un filtre passe-bas pour ne conserver que la composante continue de $w(t)$.
La fréquence de coupure doit être petite devant $2f = 20$ kHz.
On réaliser un tel filtre avec un circuit RC :



On prend $R = 10$ kΩ et $C = 1$ µF, ce qui donne une fréquence de coupure

$$f_{\text{c}} = \frac{1}{2\pi RC} = 16 \text{ Hz}.$$

16.c) Signal triangulaire
On représente le signal $w(t)$ en EA0 et la sortie du filtre en EA1. En-dessous figure le spectre de $w(t)$.



La tension en sortie du filtre est $W = 0{,}851$ V, ce qui donne une valeur efficace $U_{\text{eff}} = 2{,}92$ V.

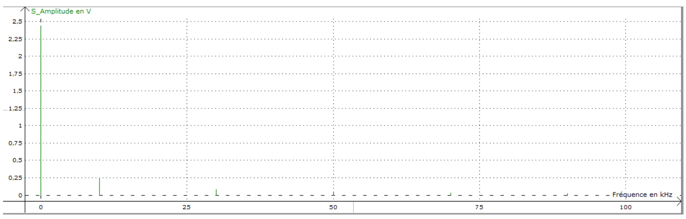
La valeur de l'harmonique de fréquence nulle est $W_0 = 0{,}851$ V, ce qui donne aussi $U_{\text{eff}} = 2{,}94$ V.

La valeur théorique est $U_{\text{eff,th}} = U/\sqrt{3} = 2{,}89$ V.

➤ Le spectre est calculé avec $T_e = 100$ ns et $N = 5000$.

Signal rectangulaire

Le spectre calculé avec les mêmes paramètres est :



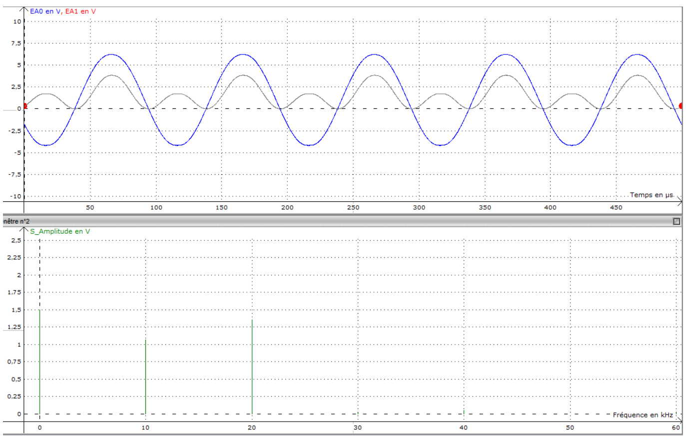
La tension en sortie du filtre est $W = 2{,}403$ V, ce qui donne une valeur efficace $U_{\text{eff}} = 4{,}90$ V.

L'harmonique de fréquence nulle a pour amplitude $W_0 = 2{,}428$ V, ce qui donne aussi $U_{\text{eff}} = 4{,}93$ V.

La valeur théorique est $U_{\text{eff,th}} = U = 5{,}0$ V.

17. Le signal est $u(t) = U_0 \cos(2\pi f t) + U_1$, avec $U_0 = 5$ V, $U_1 = 1$ V et $f = 10$ kHz.

On réalise une acquisition et une analyse spectrale avec $T_e = 100$ ns et $N = 5000$.



On relève les amplitudes des raies spectrales :

$f = 0$: $A_0 = 1{,}505$ V ;

$f = 10$ kHz : $A_1 = 1{,}072$ V ;

$f = 20$ kHz : $A_2 = 1{,}362$ V.

On a

$$\begin{aligned} u^2(t) &= U_1^2 + 2U_0U_1\cos(2\pi f t) + U_0^2\cos^2(2\pi f t) \\ &= U_1^2 + \frac{U_0^2}{2} + 2U_0U_1\cos(2\pi f t) + \frac{U_0^2}{2}\cos(2\pi 2 f t) \\ &= 13{,}5 + 10\cos(2\pi f t) + 12{,}5\cos(2\pi 2 f t)\,. \end{aligned}$$

Avec $w(t) = u^2(t)/10$, on s'attend aux amplitudes :

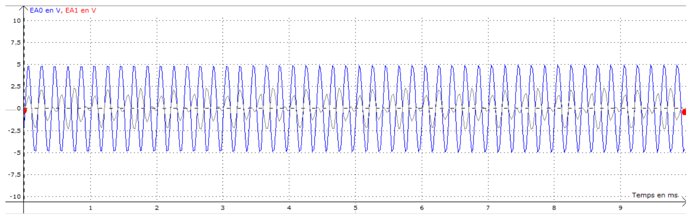
$$A_0 = 1{,}35\ \text{V}\,; \quad A_1 = 1{,}00\ \text{V}\,; \quad A_2 = 1{,}23\ \text{V}\,.$$

Les valeurs mesurées diffèrent quelque peut, du fait de l'imprécision du réglage de l'amplitude et de la composante continue, mais les valeurs relatives sont respectées.

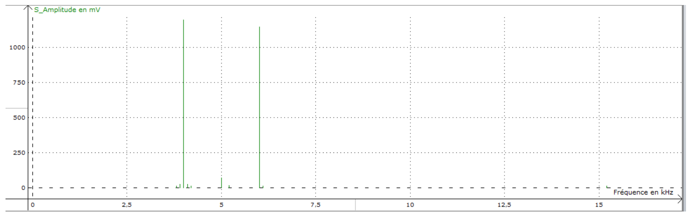
3.2 Cas de deux sinusoïdes différentes

On applique maintenant en entrée du multiplieur deux signaux sinusoïdaux de même amplitude 5 V et de fréquences $f_1 = 1$ kHz et $f_2 = 5$ kHz.

18. Aspect temporel :



19. Spectre du signal de sortie :



On observe comme attendu deux composantes aux fréquences

$$f_2 - f_1 = 4\ \text{kHz} \quad \text{et} \quad f_2 + f_1 = 6\ \text{kHz}\,.$$

Les amplitudes devraient être identiques. L'écart peut s'expliquer par la présence d'une légère composante continue sur le signal de fréquence $f_1 = 1$ kHz, hypothèse justifiée par la présence d'une faible composante à la fréquence $f_2 = 5$ kHz dans le spectre du produit. En effet, si

$$u_1(t) = U_0 + U_1\cos(2\pi f_1 t) \quad \text{et} \quad u_2 = U_2\cos(2\pi f_2 t)\,,$$

on a

$$\begin{aligned} s(t) = k u_1(t) u_2(t) &= kU_0U_2\cos(2\pi f_2 t) \\ &\quad + kU_1U_2\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_2 t) \\ &= kU_0U_2\cos(2\pi f_2 t) + \frac{kU_1U_2}{2}\cos[2\pi(f_2 - f_1)t] \\ &\qquad + \frac{kU_1U_2}{2}\cos[2\pi(f_2 + f_1)t]\,. \end{aligned}$$

d'où l'existence des fréquences $f_2 = 5$ kHz, $f_2 - f_1 = 4$ kHz et $f_2 + f_1 = 6$ kHz.