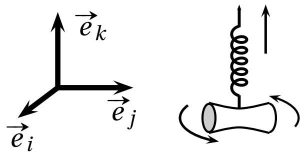
Mathématiques et physique — Les systèmes de coordonnées

Systèmes de coordonnées

Il est d'usage de repérer un point dans l'espace à l'aide d'une **base orthonormée directe**, constitués de trois vecteur $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ unitaires ($\|\vec{e}_i\| = 1$) et orthogonaux[1]. L'espace est conventionnellement orienté dans le sens direct. On retiendra la convention usuelle à l'aide de l'image d'un tire-bouchon : la base $(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ est directe si en tournant $\vec{e}_i$ vers $\vec{e}_j$, le tire-bouchon s'enfonce dans la direction de $\vec{e}_k$.



Coordonnées cartésiennes

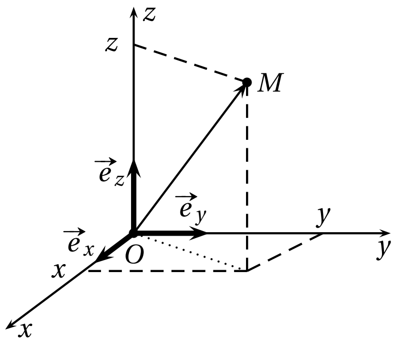
Un point est repéré par ses trois coordonnées x, y et z : $M(x, y, z)$.

Le vecteur position s'écrit $\boxed{\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z}$.

Le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{\ell} = \overrightarrow{MM'}$, avec $M'(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z)$, s'écrit

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z}.$$

Le volume élémentaire s'écrit $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.



Coordonnées cylindriques

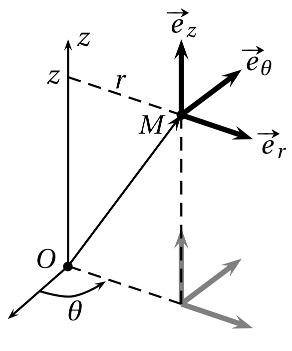
Un point est repéré par ses trois coordonnées r, θ et z : $M(r, \theta, z)$.

Le vecteur position s'écrit $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z}$.

Le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{\ell} = \overrightarrow{MM'}$, avec $M'(r+\mathrm{d}r, \theta+\mathrm{d}\theta, z+\mathrm{d}z)$, s'écrit

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z}.$$

Le volume élémentaire s'écrit $\mathrm{d}\tau = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$.



➤ La base cylindrique est une **base locale** : les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ dépendent du point M.

Coordonnées sphériques

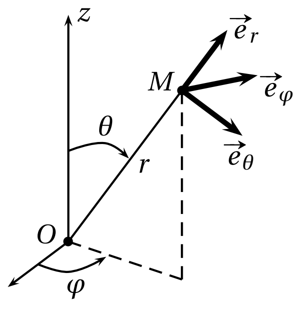
Un point est repéré par ses trois coordonnées r, θ et φ : $M(r, \theta, \varphi)$.

Le vecteur position s'écrit $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r}$.

Le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{\ell} = \overrightarrow{MM'}$, avec $M'(r+\mathrm{d}r, \theta+\mathrm{d}\theta, \phi+\mathrm{d}\phi)$, s'écrit

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi}.$$

Le volume élémentaire s'écrit $\mathrm{d}\tau = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$.



➤ La base sphérique est une **base locale** : les vecteurs $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_\varphi$ dépendent du point M.

1. Ces deux propriétés peuvent se résumer en $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ à l'aide du symbole de Kronecker.