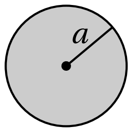
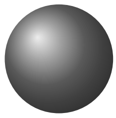
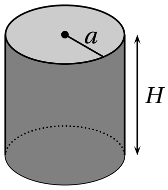
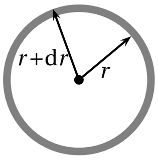
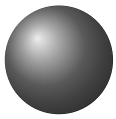
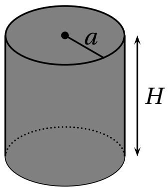
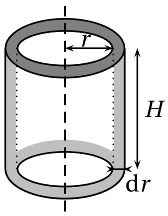
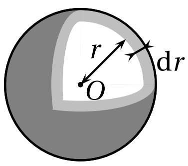
Mathématiques et physique — Surfaces et volumes

Surfaces à connaître

Disque de rayon a		$S = \pi a^2$
Sphère de rayon a		$S = 4\pi a^2$
Surface latérale d'un cylindre de rayon a, de hauteur H		$S = 2\pi a H$
Anneau de rayon r, de largeur dr		$\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$

Volumes à connaître

Boule de rayon a		$V = \dfrac{4}{3}\pi a^3$
Cylindre de rayon a, de hauteur H		$V = \pi a^2 H$
Tube de hauteur H, de rayon r et d'épaisseur dr		$\mathrm{d}V = 2\pi r H\,\mathrm{d}r$
Coquille sphérique de rayon r, d'épaisseur dr		$\mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$

Pratique du calcul intégral

Le principe fondamental du calcul intégral est de considérer constante une fonction $f(x)$ pour un accroissement élémentaire $\mathrm{d}x$ de la variable x.

- Pour une fonction $f(x, y, z)$ de plusieurs variables, on considère de même que cette fonction reste constante pour un accroissement élémentaire $\mathrm{d}x$ de la variable x, les autres variables étant maintenues constantes.

Exemple : calcul de la charge d'une distribution. On considère une distribution de densité volumique de charges $\rho(x, y, z)$ en coordonnées cartésiennes. Sur le volume élémentaire $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, on peut considérer $\rho(x, y, z)$ constante, ce qui permet d'écrire charge = densité × volume, soit $\delta Q = \rho(x, y, z)\mathrm{d}\tau$. La charge totale s'écrit alors $Q = \iiint_{M\in\mathcal{D}} \rho(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

- Le raisonnement « la fonction est constante pour un accroissement élémentaire des variables » semble approché, mais l'intégrale est définie comme un passage à la limite où les accroissements envisagés tendent vers zéro, ce qui conduit à un résultat exact.
- Le plus souvent, on étudie des systèmes possédant certaines invariances, ce qui permet de se ramener à une intégrale simple en choisissant un volume élémentaire « plus grand ».
- **Coordonnées cylindriques**

  On « découpe » la distribution en tubes élémentaires de rayon r, d'épaisseur $\mathrm{d}r$, de volume $\mathrm{d}\tau = 2\pi r H\,\mathrm{d}r$, sur lesquels on peut considérer la densité volumique uniforme.

  La charge totale d'un cylindre de rayon a, de hauteur H, portant une densité volumique de charges de la forme $\rho(M) = \rho(r)$ est

  $$\boxed{Q = \int_0^a \rho(r) 2\pi r H\,\mathrm{d}r}\,.$$

- **Coordonnées sphériques**

  On « découpe » la distribution en coquilles sphériques élémentaires de rayon r, d'épaisseur $\mathrm{d}r$, de volume $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$, sur lesquels on peut considérer la densité volumique uniforme.

  La charge totale d'une sphère de rayon a, portant une densité volumique de charges de la forme $\rho(M) = \rho(r)$ est

  $$\boxed{Q = \int_0^a \rho(r) 4\pi r^2\,\mathrm{d}r}\,.$$

Flux et circulations à connaître

Problème à symétrie cylindrique

Circulation d'un vecteur orthoradial $\vec{B}(M) = B(r)\,\vec{e}_\theta$ (en coordonnées cylindriques) le long d'un cercle Γ d'axe Oz, de rayon r orienté selon $\vec{e}_\theta$:

$$\boxed{\mathcal{C} = \oint_{M\in\Gamma} \vec{B}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{\ell}_M = 2\pi r B(r)}$$

Flux d'un vecteur radial $\vec{A}(M) = A(r)\,\vec{e}_r$ (en coordonnées cylindriques) à travers un cylindre Σ d'axe Oz, de rayon r et de hauteur H :

$$\boxed{\Phi = \oiint_{M\in\Sigma} \vec{A}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M = 2\pi r H A(r)}$$

Problème à symétrie sphérique

Flux d'un vecteur radial $\overrightarrow{A}(M) = A(r)\,\overrightarrow{e}_r$ (en coordonnées sphériques) à travers une sphère Σ de centre O et de rayon r :

$$\boxed{\Phi = \oiint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{A}(M)\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}_M = 4\pi r^2 A(r)}$$