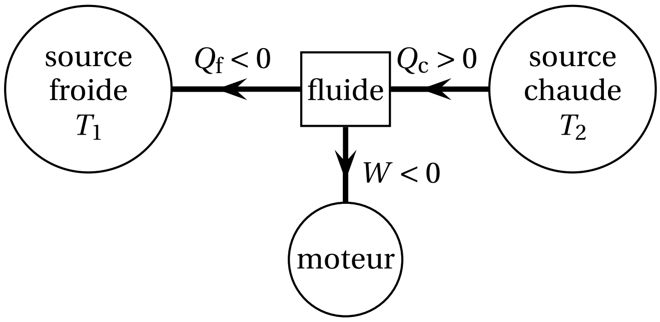
TD de thermodynamique — Les deux principes

2 — Machine thermique avec pseudo-sources

1. Représentons schématiquement le fonctionnement du dispositif, en y indiquant le sens réel des échanges énergétiques :



Le système étudié est le fluide de la machine frigorifique, qui subit une évolution cyclique (en circuit fermé).

On compte positivement les énergies reçues effectivement par le fluide : on a $Q_1 < 0$, $Q_2 > 0$ et $W < 0$.

La source chaude cédant de l'énergie au fluide, elle voit sont énergie interne diminuer, donc (il n'y a pas de changement d'état en son sein) sa température diminue en raison de sa capacité thermique finie.

La source froide recevant de l'énergie de la part du fluide, elle voit sont énergie interne augmenter, donc (il n'y a pas de changement d'état en son sein) sa température augmente.

On s'attend à ce que le moteur cesse de fonctionner quand les températures des deux sources seront égales.

2. On ne peut pas écrire l'égalité de Clausius pour l'évolution complète, car les températures des deux « sources » ne sont pas constantes (d'où le terme « pseudo-source »).

Nous allons considérer un « cycle élémentaire », quand le fluide effectue un tour dans le circuit fermé : lors d'un tel cycle, les températures des sources varient très peu; on peut donc les considérer comme constantes au premier ordre, et écrire l'égalité de Clausius

$$\frac{\delta Q_f}{T_1} + \frac{\delta Q_c}{T_2} = 0 .$$

Lorsque la température de la source froide varie de $\mathrm{d}T_1$, le premier principe appliqué à cette source s'écrit

$$\mathrm{d}U_1 = C\,\mathrm{d}T_1 = \delta Q_1 ,$$

où δQ_1 est le transfert thermique reçu (algébriquement) par la source de la part du fluide. Réciproquement, le transfert thermique reçu par le fluide de la part de la source vaut $\delta Q_f = -\delta Q_1$, soit $\delta Q_f = -C\,\mathrm{d}T_1$.

De même le bilan d'énergie $\mathrm{d}U_2 = C\,\mathrm{d}T_2 = \delta Q_2$ appliqué à la source chaude conduit au transfert thermique reçu par le fluide de la part de cette source : $\delta Q_c = -C\,\mathrm{d}T_2$.

L'égalité de Clausius s'écrit alors

$$\frac{-C\,\mathrm{d}T_1}{T_1} + \frac{-C\,\mathrm{d}T_2}{T_2} = 0 ,$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T_1}{T_1} + \frac{\mathrm{d}T_2}{T_2} = 0} .$$

Intégrons entre l'état initial, où les températures des deux sources valent $T_{i,1}$ et $T_{i,2}$, et l'état final où les sources ont la même température T_∞ :

$$\int_{T_{i,1}}^{T_\infty} \frac{\mathrm{d}T_1}{T_1} + \int_{T_{i,2}}^{T_\infty} \frac{\mathrm{d}T_2}{T_2} = 0 ,$$

soit

$$\ln\left(\frac{T_\infty}{T_{i,1}}\right) + \ln\left(\frac{T_\infty}{T_{i,2}}\right) = \ln\left(\frac{T_\infty^2}{T_{i,1}\,T_{i,2}}\right) = 0$$

soit $\dfrac{T_\infty^2}{T_{i,1}\,T_{i,2}} = 1$, d'où $\boxed{T_\infty = \sqrt{T_{i,1}\,T_{i,2}}}$.

On calcule $\boxed{T_\infty = 52\ °\mathrm{C}}$.

Le moteur s'arrête alors de fonctionnement.

3. Pour le cycle élémentaire, le premier principe s'écrit

$$\mathrm{d}U = \delta Q_c + \delta Q_f + \delta W = 0$$

qui s'intègre pour donner

$$Q_c + Q_f + W = 0 .$$

Les transferts thermiques reçu par le fluide pendant toute la durée de fonctionnement du moteur sont

$$Q_f = -C(T_\infty - T_{i,1}) \quad \text{et} \quad Q_c = -C(T_\infty - T_{i,2}) .$$

Le travail échangé donc donné par

$$\boxed{W = C\left[2\sqrt{T_{i,1}T_{i,2}} - T_{i,1} - T_{i,2}\right]}.$$

On calcule $\boxed{W = -2{,}5\times 10^6\ \mathrm{J}}$.

4. L'efficacité est définie par

$$\eta = \frac{-W}{Q_f} = \frac{T_{i,1} + T_{i,2} - 2\sqrt{T_{i,1}T_{i,2}}}{T_{i,2} - \sqrt{T_{i,1}T_{i,2}}}.$$

On calcule $\boxed{\eta = 13\ \%}$.

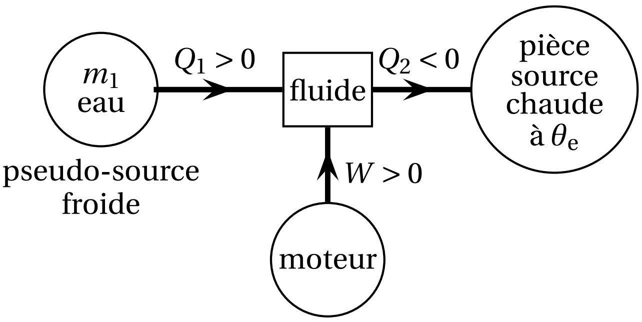
L'efficacité du cycle de Carnot utilisant deux sources de températures $T_{i,1}$ et $T_{i,2}$ est donné par

$$\eta = 1 - \frac{T_{i,1}}{T_{i,2}} = 24\ \%.$$

La valeur finie de la capacité thermique des sources, en plus de limiter la durée de fonctionnement du moteur, diminue significativement son efficacité.

3 — Congélation d'une masse d'eau

Représentons schématiquement le fonctionnement du dispositif, en y indiquant le sens réel des échanges énergétiques :



Le système étudié est le fluide de la machine frigorifique, qui subit une évolution cyclique (en circuit fermé).

On compte positivement les énergies reçues effectivement par le fluide : on a $Q_1 > 0$, $Q_2 < 0$ et $W > 0$.

La transformation totale est cyclique (constituée d'un grand nombre de cycles) ; le premier principe s'écrit donc

$$\Delta U = Q_1 + Q_2 + W = 0.$$

On peut calculer directement Q_1, en calculant le transfert thermique $-Q_1 = \Delta U = \Delta H$ reçu par la masse m_1 d'eau[1].

La transformation subie par l'eau se décompose en trois étapes :

1re étape : refroidissement de θ_1 à θ_{fus}, avec $\Delta H' = mc_1(\theta_{fus} - \theta_1)$

2e étape : solidification isotherme à θ_{fus}, avec $\Delta H'' = -mL_{fus}$;

3e étape : refroidissement de θ_{fus} à θ_2, avec $\Delta H''' = mc_2(\theta_2 - \theta_{fus})$.

La variation de l'enthalpie de l'eau est donc

$$\Delta H = \Delta H' + \Delta H'' + \Delta H''' = -Q_1,$$

d'où

$$\boxed{Q_1 = -mc_1(\theta_{fus} - \theta_1) + mL_{fus} - mc_2(\theta_2 - \theta_{fus})}.$$

On calcule numériquement $\boxed{Q_1 = 439\ \mathrm{kJ}}$.

La masse m_1 joue ici le rôle d'une pseudo-source de chaleur. On ne peut donc appliquer l'égalité de Clausius sans précaution, car sa température varie au cours du fonctionnement du congélateur. Il faut raisonner sur un « cycle élémentaire », c'est-à-dire un cycle unique du fluide (il fait une tour dans les tuyaux). En effet, quand le fluide ne parcours qu'un seul cycle dans la machine, la variation de température de la masse m_1 d'eau est négligeable ; on peut la considérer comme constante, et la masse d'eau se comporte alors comme une source de chaleur. Le second principe s'écrit alors sous la forme de l'égalité de Clausius[2]

$$\frac{\delta Q_2}{T_e} + \frac{\delta Q_1}{T} = 0,$$

où T est la température de la masse d'eau. Attention, il faut ici passer aux températures absolues en kelvin.

On intègre cette relation sur la transformation totale (refroidissement et congélation de la masse d'eau), en distinguant 3 étapes pour la transformation de l'eau :

entre T_1 et T_{fus} : refroidissement, pour lequel $\delta Q_1 = -mc_1\mathrm{d}T$ quand la température varie de $\mathrm{d}T$;

à T_{fus} : solidification pour laquelle le transfert thermique total vaut mL_{fus} ;

entre T_{fus} et T_2 : refroidissement, pour lequel $\delta Q_1 = -mc_2\mathrm{d}T$ quand la température varie de $\mathrm{d}T$.

1. Pour une phase condensée idéale, on assimile $\Delta U \approx \Delta H$.
2. Il s'agit bien d'une égalité car on précise que le fonctionnement est réversible.

L'intégration de l'égalité de Clausius pour la totalité de la transformation s'écrit alors

$$\frac{Q_2}{T_e} + \int_{T_1}^{T_{fus}} -mc_1 \frac{dT}{T} + \frac{mL_{fus}}{T_{fus}} + \int_{T_{fus}}^{T_2} -mc_2 \frac{dT}{T} = 0\,,$$

soit

$$\frac{Q_2}{T_e} - mc_1 \ln\left(\frac{T_{fus}}{T_1}\right) + \frac{mL_{fus}}{T_f} - mc_2 \ln\left(\frac{T_2}{T_{fus}}\right) = 0\,.$$

On en déduit

$$\boxed{Q_2 = mT_e\left[c_1 \ln\left(\frac{T_{fus}}{T_1}\right) + c_2 \ln\left(\frac{T_2}{T_{fus}}\right) - \frac{L_{fus}}{T_{fus}}\right]}\,.$$

On calcule $\boxed{Q_2 = -477 \text{ kJ}}$.
Le premier principe nous permet de calculer le travail reçu par le fluide :

$$W = -Q_1 - Q_2 = 37{,}5 \text{ kJ}\,.$$

La puissance fournie par le moteur est donnée par $P = \dfrac{W}{\tau}$, d'ou $\tau = \dfrac{W}{P} = \dfrac{37\,500}{50}$. On obtient

$$\boxed{\tau = 750 \text{ s} = 12{,}5 \text{ min}}\,.$$

Discussion : Il s'agit en réalité de la durée minimale, calculée dans le cas idéal d'un fonctionnement réversible. La durée réelle sera plus grande.

4 — Le coût du froid

Dans un premier temps, établissons les résultats caractéristiques du frigo.
Nous pouvons prendre de façon réaliste $T_c = 25\,°C = 298$ K et $T_f = 5\,°C = 278$ K.
Le cycle de Carnot correspond est décrit par

$$0 = W + Q_c + Q_f \quad \text{et} \quad \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} = 0$$

avec $Q_f > 0$ et $Q_c < 0$.

L'efficacité est

$$e_C = \frac{Q_f}{W} = -\frac{Q_f}{Q_f + Q_c} = \frac{T_f}{T_c - T_f}\,.$$

Le rendement du frigo étant $\eta = 0{,}70$, son efficacité, définie par

$$e = \frac{Q_{f,frigo}}{W_{frigo}}$$

$$e = \eta e_C = \eta \frac{T_f}{T_c - T_f} = 0{,}70 \times \frac{278}{20} = 9{,}7\,.$$

Soit Δt la durée nécessaire pour abaisser la température des jus de fruit. Le premier principe appliqué à l'intérieur du frigo contenant les jus de fruit donne

$$\Delta U_{frigo} = m_{jus} c_{eau} (T_f - T_c)$$

car seuls les jus de fruit voient leur température varier.
Le frigo reçoit le transfert thermique $-Q_f$ de la part du fluide réfrigérant, et $Q_{fuite} = -\mathcal{P}_{fuite}\Delta t$ où $\mathcal{P}_{fuite}$ est la puissance perdue par les fuites thermiques.
Le premier principe s'écrit alors

$$m_{jus} c_{eau} (T_f - T_c) = -Q_{f,frigo} - \mathcal{P}_{fuite}\Delta t\,.$$

On peut calculer

$$\begin{aligned} Q_{f,frigo} &= m_{jus} c_{eau} (T_c - T_t) - \mathcal{P}_{fuite}\Delta t \\ &= 6 \times 4{,}2 \times 10^3 \times 20 - 10 \times 3600 = 4{,}7 \times 10^5 \text{ J}\,. \end{aligned}$$

L'énergie électrique dépensée est

$$\mathcal{E}_{élec} = W_{frigo} = \frac{Q_{f,frigo}}{e} = \frac{4{,}7 \times 10^5}{9{,}7} = 4{,}8 \times 10^4 \text{ J}\,.$$

Sachant que $1 \text{ kWh} = 1 \times 10^3 \text{ W} \times 3600 \text{ s} = 3{,}6 \times 10^6$ J, on en déduit

$$\mathcal{E}_{élec} = 1{,}3 \times 10^{-2} \text{ kWh}$$

d'où une dépense de $1{,}3 \times 10^{-2} \times 0{,}15$ soit $\boxed{0{,}2 \text{ centimes}}$.