Chapitre III : Algèbre linéaire : rappels et compléments

- Espaces vectoriels :
  - ⋆ Définition de sous-espace vectoriel, dimension d'un espace vectoriel, somme de sous-espaces vectoriels, somme directe de deux sous-espaces vectoriels, somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces supplémentaires.
  - ⋆ Caractérisation d'une somme de deux sous-espaces vectoriels par $F \cap G = \{0\}$.
  - ⋆ Formule de Grassmann.
  - ⋆ Caractérisation de $F \oplus G = E$ en dimension finie et en dimension infinie.
  - ⋆ Caractérisation d'une somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels :
    $\forall (e_1, \ldots, e_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$, $e_1 + \cdots e_n = 0 \Longrightarrow e_1 = \ldots = e_n = 0$.

- Familles de vecteurs :
  - ⋆ Définition de famille libre, liée, génératrice **de** E, base **de** E.
  - ⋆ En dimension finie, si $\dim E = n$ alors $(e_1, .., e_n)$ est libre ssi elle est génératrice **de** E ssi elle est une base **de** E.
  - ⋆ Liberté d'une famille de polynôme de degrés échelonnés.

- Applications linéaires :
  - ⋆ Définition d'une application linéaire, du noyau, de l'image, du rang d'une application linéaire.
  - ⋆ Caractérisation de l'injectivité avec le noyau. De la surjectivité avec le rang (en dimension finie).
  - ⋆ Dans le cas de la dimension finie : une application linéaire est déterminée par les images $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de l'espace de départ. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité en fonction de la nature de la famille $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.
  - ⋆ Définition et caractérisation d'un projecteur, d'une symétrie.
  - ⋆ Le théorème du rang.
  - ⋆ Définition d'un hyperplan H dans un espace vectoriel E de dimension n : $H = \ker(\phi)$ avec ϕ une forme linéaire non nulle, $\dim H = n - 1$, $E = H \oplus D$ avec D une droite vectorielle.
  - ⋆ Définitions de sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme.
    Si $u \circ v = v \circ u$ alors $\ker u$ et Imu sont stables par v.

- Matrices et applications linéaires :
  - ⋆ Il faut savoir passer d'une matrice à une application linéaire et réciproquement, il faut savoir donner la matrice d'une application linéaire dans n'importe quelle base.
  - ⋆ Matrice de passage d'une base à une autre.
  - ⋆ Formule de changement de base : $Mat_{\mathcal{E}',\mathcal{F}'}(u) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} Mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$.
  - ⋆ Interprétation géométrique de matrices semblables.

- Opérations matricielles :
  - ⋆ Définition du produit matriciel : $c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$.
  - ⋆ Matrices par blocs : produit matriciel par blocs, interprétation géométrique d'une matrice triangulaire par blocs en terme de stabilité de sous-espaces vectoriels.

Questions de cours :

– Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on pose $\mathcal{P} = \{f \in E \ : \ f \text{ est paire}\}$ et $\mathcal{I} = \{f \in E \ : \ f \text{ est impaire}\}$.
Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans E.

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^3 = I_n$.
  On considère les sous-espaces vectoriels

  $$E_1 = \{X \in \mathbb{C}^n : MX = X\} \qquad E_j = \{X \in \mathbb{C}^n : MX = jX\} \qquad E_{j^2} = \left\{X \in \mathbb{C}^n : MX = j^2 X\right\}.$$

  Montrer que la somme $E_1 + E_j + E_{j^2}$ est directe.

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^{n-1} \neq 0$ et $M^n = 0$.

  Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- Soient $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on pose $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
  Sans utiliser le déterminant, donner une condition nécessaire et suffisante d'inversibilité de M et calculer son inverse.

- **a.** Soient u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer que $\ker(u)$ est stable par v.
  b. Soient A et B deux matrices semblables. Montrer que A et B possèdent les mêmes polynômes annulateurs.