

Chapitre III : Algèbre linéaire : rappels et compléments

- Espaces vectoriels :
 - ★ Définition de sous-espace vectoriel, dimension d'un espace vectoriel, somme de sous-espaces vectoriels, somme directe de deux sous-espaces vectoriels, somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels, sous-espaces supplémentaires.
 - ★ Caractérisation d'une somme de deux sous-espaces vectoriels par $F \cap G = \{0\}$.
 - ★ Formule de Grassmann.
 - ★ Caractérisation de $F \oplus G = E$ en dimension finie et en dimension infinie.
 - ★ Caractérisation d'une somme directe de plusieurs sous-espaces vectoriels :
 $\forall (e_1, \dots, e_n) \in E_1 \times \dots \times E_n, e_1 + \dots + e_n = 0 \implies e_1 = \dots = e_n = 0$.
- Familles de vecteurs :
 - ★ Définition de famille libre, liée, génératrice **de** E , base **de** E .
 - ★ En dimension finie, si $\dim E = n$ alors $(e_1, \dots, e_n)$ est libre ssi elle est génératrice **de** E ssi elle est une base **de** E .
 - ★ Liberté d'une famille de polynôme de degrés échelonnés.
- Applications linéaires :
 - ★ Définition d'une application linéaire, du noyau, de l'image, du rang d'une application linéaire.
 - ★ Caractérisation de l'injectivité avec le noyau. De la surjectivité avec le rang (en dimension finie).
 - ★ Dans le cas de la dimension finie : une application linéaire est déterminée par les images $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ d'une base $(e_1, \dots, e_n)$ de l'espace de départ. Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité en fonction de la nature de la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
 - ★ Définition et caractérisation d'un projecteur, d'une symétrie.
 - ★ Le théorème du rang.
 - ★ Définition d'un hyperplan H dans un espace vectoriel E de dimension n : $H = \ker(\phi)$ avec ϕ une forme linéaire non nulle, $\dim H = n - 1$, $E = H \oplus D$ avec D une droite vectorielle.
 - ★ Définitions de sous-espaces vectoriels stables par un endomorphisme.
 Si $u \circ v = v \circ u$ alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ sont stables par v .
- Matrices et applications linéaires :
 - ★ Il faut savoir passer d'une matrice à une application linéaire et réciproquement, il faut savoir donner la matrice d'une application linéaire dans n'importe quelle base.
 - ★ Matrice de passage d'une base à une autre.
 - ★ Formule de changement de base : $\operatorname{Mat}_{\mathcal{E}', \mathcal{F}'}(u) = P_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \operatorname{Mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(u) P_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$.
 - ★ Interprétation géométrique de matrices semblables.
- Opérations matricielles :
 - ★ Définition du produit matriciel : $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$.
 - ★ Définition de la trace. La trace est linéaire et $\operatorname{Tr}(AB) = \operatorname{Tr}(BA)$.
 - ★ Calcul de l'inversibilité d'une matrice à l'aide d'un polynôme annulateur. Calcul d'une puissance de matrice à l'aide d'un polynôme annulateur.
 - ★ Matrices par blocs : produit matriciel par blocs, interprétation géométrique d'une matrice triangulaire par blocs en terme de stabilité de sous-espaces vectoriels.

- Déterminant d'une matrice :

★ Il faut savoir calculer le déterminant d'une matrice.

★ Pour une matrice triangulaire par blocs $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, $\det(M) = \det(A) \det(C)$.

★ Il faut connaître le déterminant d'une matrice de Vandermonde.

- Les polynômes d'interpolation de Lagrange :

soit $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tous différents, on définit $L_k(X) = \prod_{i \neq k} \left(\frac{X - a_i}{a_k - a_i} \right)$.

La famille $(L_1, \dots, L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et les coordonnées de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base sont $(P(a_1), \dots, P(a_{n+1}))$.

Questions de cours :

- Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on pose $\mathcal{P} = \{f \in E : f \text{ est paire}\}$ et $\mathcal{I} = \{f \in E : f \text{ est impaire}\}$.
Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ sont supplémentaires dans E .

- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $M^3 = I_n$.
On considère les sous-espaces vectoriels

$$E_1 = \{X \in \mathbb{C}^n : MX = X\} \quad E_j = \{X \in \mathbb{C}^n : MX = jX\} \quad E_{j^2} = \{X \in \mathbb{C}^n : MX = j^2X\}.$$

Montrer que la somme $E_1 + E_j + E_{j^2}$ est directe.

- Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $M^{n-1} \neq 0$ et $M^n = 0$.

Montrer que M est semblable à
$$\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & 0 & & & \\ & 1 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Soit A une matrice carrée telle que $A^2 - 3A + 2I_n = 0$.
Calculer les puissances k -ième de A en fonction de A et I_n .

- Soient $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, et pour tout $n \geq 2$, $M_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Calculer les déterminant de M_2 et M_3 .
2. Donner une relation entre $\det(M_{n+2})$, $\det(M_{n+1})$ et $\det(M_n)$.
3. En déduire $\det(M_n)$ en fonction de n .