

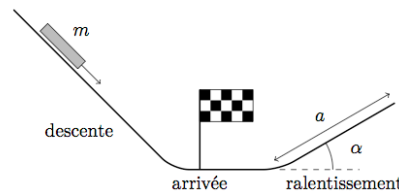
DM n° 4

Transfert thermique, thermochimique

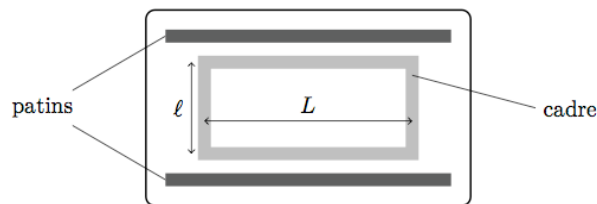
À rendre le vendredi 15 novembre 2024

I — Physique du skeleton : refroidissement du cadre

Le skeleton est un sport d'hiver qui se pratique dans un couloir de glace en pente : le coureur s'allonge sur une planche qui glisse sur la glace en prenant appui sur des patins.



On fixe sous la planche un cadre métallique conducteur ayant la forme d'un rectangle de côtés $\ell \times L$.



Un dispositif adéquat crée un champ magnétique sur une partie de la piste. Par un phénomène que vous étudierez prochainement (patience...), l'induction électromagnétique, il apparaît un courant électrique induit dans le cadre; ce dernier est alors soumis, de la part du champ magnétique, à une force de freinage.

L'ensemble coureur + skeleton est assimilé à un solide de masse $m = 100 \text{ kg}$ pouvant glisser sans frottement. Il franchit la ligne d'arrivée avec une vitesse v . On prendra $v = 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Dans un milieu homogène et isotrope caractérisé par sa masse volumique μ , sa capacité thermique massique c et sa conductivité thermique λ , établir, dans le cas d'un phénomène unidimensionnel décrit par $T(x, t)$, l'équation aux dérivées partielles à laquelle obéit le champ de température $T(x, t)$.

En déduire une relation entre le temps caractéristique τ et la distance caractéristique δ des transferts thermiques.

2. On modélise les côtés du cadre comme des cylindres de rayon a (et de section $s = \pi a^2$) dans lesquels la température T ne dépend que de r , distance à l'axe, et du temps t . Le cadre est en cuivre

- de masse volumique $\mu = 8,9 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$;
- de résistivité électrique $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$;
- de conductivité thermique $\lambda = 390 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$;
- de capacité thermique massique $c = 390 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$;
- de dimensions $\ell = 30 \text{ cm}$ et $L = 50 \text{ cm}$.

Sa section est $s = 1,0 \text{ cm}^2$, ses dimensions sont $\ell = 30 \text{ cm}$ et $L = 50 \text{ cm}$.

En négligeant les effets dus au courant électrique, calculer le temps caractéristique des transferts thermiques dans le cylindre. Le temps d'arrêt dû au freinage par induction électromagnétique est de l'ordre de la dizaine de secondes. Comparer ces deux durées et commenter.

Dans toute la suite du problème, la température du cadre sera considérée comme uniforme : T ne dépend que du temps éventuellement.

3. Considérant que l'on puisse négliger les transferts thermiques vers l'extérieur pendant la phase d'échauffement, déterminer ainsi la variation de température ΔT du cadre en fonction de m' (masse du cadre), m , v_0 et c (on considérera, pour simplifier, que la vitesse est nulle à l'issue de la phase de freinage électromagnétique).

On fera l'application numérique.

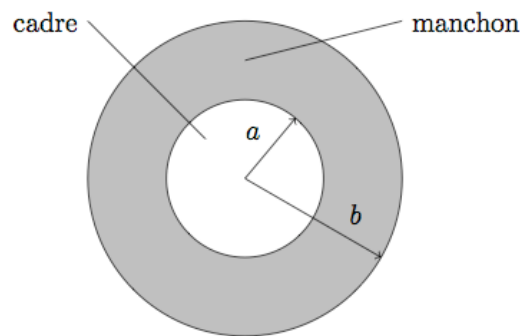
4. Après arrêt du skeleton le cadre se refroidit. Au cours de cette phase de refroidissement, la température T_c du cadre est supposée uniforme mais dépendant du temps : $T_c(t)$ passe ainsi de T_1 à T_0 température de l'air, supposée uniforme et constante. Les transferts thermiques entre le cadre et l'air ont lieu selon un mode dit conducto-convectif; il y a une discontinuité de température entre le cadre et l'air : la température T_0 est différente de T_c . La puissance thermique transférée vers l'air par unité de surface latérale du cylindre est $P_{th} = h(T_c - T_0)$ où h est un coefficient supposé positif et constant.

4.a) Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $T_c(t)$ et donner le temps caractéristique du refroidissement en fonction des paramètres déjà introduits.

4.b) Application numérique.

Déterminer ce temps avec $h = 10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

5. On a l'idée d'entourer le cadre cylindrique d'un manchon isolant thermique. Le manchon isolant est de conductivité thermique λ_{is} et de rayon b .



5.a) On commence par raisonner en régime supposé permanent : la température du cadre est T_c indépendante de t . Le champ de température dans l'isolant ne dépend que de r : on note $T_{is}(r)$ la température dans l'isolant. Entre l'isolant et l'air (de température toujours supposée égale à T_0) existe encore un transfert thermique de type conducto-convectif possédant les mêmes caractéristiques que précédemment à ceci près que la température T_c doit être remplacée par $T_{is}(b)$: $P_{th} = h(T_{is}(b) - T_0)$. Ce mode de transfert n'existe pas entre le cadre et l'isolant, on a donc $T_{is}(a) = T_c$.

Établir l'équation différentielle vérifiée par $T_{is}(r)$ puis montrer que la puissance thermique P cédée par l'unité de longueur du cadre peut s'écrire

$$P = K \frac{x}{1 + \frac{ha}{\lambda_{is}} x \ln x}$$

où $x = b/a$, K étant une constante que l'on exprimera en fonction de h , a , T_0 et T_c . À quoi correspond cette constante K ?

5.b) Tracer la courbe montrant la dépendance de P avec x ; on fera apparaître deux types de comportements possibles que l'on interprétera physiquement.

On donne $\lambda_{is} = 0,10 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; déterminer l'épaisseur d'isolant à placer pour que le refroidissement s'effectue le plus rapidement possible.

5.c) On suppose le régime quasi-permanent : les résultats précédents sont supposés pouvoir être appliqués à chaque instant. Déterminer le nouveau temps caractéristique du refroidissement du cadre lorsque l'isolant a l'épaisseur calculée ci-dessus.

II — Un lac en hiver — Banque PT 2022

On s'intéresse au lac de Joux, situé en Suisse; il s'agit du plus grand plan d'eau du massif jurassien et il constitue une destination de loisirs appréciée des amoureux de la nature et des sports de plein air, tant en été qu'en hiver.

En hiver, la température extérieure est de $-10\text{ }^\circ\text{C}$; le lac gèle et devient la plus grande patinoire naturelle d'Europe.

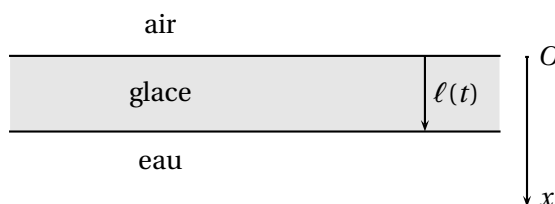
On se propose de modéliser la croissance de la couche de glace à la surface du lac, en régime quasi stationnaire.

On note $H = 30\text{ m}$ la profondeur du lac, et $S = 10\text{ km}^2$ sa surface.

On suppose que l'eau est en permanence à la température de fusion $T_e = 273\text{ K}$.

L'air au-dessus du lac est à la température constante est uniforme $T_a = 263\text{ K}$ et à la pression atmosphérique $P_0 = 1\text{ bar}$.

Libre de glace à l'instant $t = 0$, le lac se couvre progressivement d'une couche de glace dont l'épaisseur à l'instant t est $\ell(t)$. Comme le montre la figure suivante, la position d'un point du lac est repérée par son abscisse x , l'axe Ox étant vertical descendant et l'origine O étant au niveau de la surface du lac.



Les caractéristiques de la glace sont les suivantes :

- masse volumique $\mu = 990\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$;
- conductivité thermique $\lambda = 2,1\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$;
- enthalpie massique de fusion (à $T_e = 273\text{ K}$) $\Delta h_f = 335\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$;
- capacité thermique massique $c_g = 2,1\text{ kJ}\cdot\text{kg}\cdot\text{K}^{-1}$.

On fait les deux hypothèses suivantes relatives aux transferts thermiques convectifs :

- le transfert thermique par convection à l'interface glace-air, pour une surface S de glace, pendant la durée dt , est donné par la relation $\delta Q_c = h[T_0(t) - T_a]Sdt$, où $T_0(t) = T(x = 0, t)$ est la température de la glace en $x = 0$. La température T_0 est comprise entre T_a et T_e ($T_a < T_0 < T_e$) de sorte que ce transfert s'effectue de la glace vers l'air. On donne $h = 42\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$;
- le transfert thermique par conduction à l'interface eau-glace est négligé, de sorte que la température à cette interface est constamment égale à la température de l'eau : $T(x = \ell, t) = T_e$.

On rappelle l'équation de la diffusion thermique dans la glace : $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \mu c_g \frac{\partial T}{\partial t}$.

1. Calculer le rapport $\ell_0 = \lambda/h$ en précisant son unité.
2. Le gel de l'eau induit un transfert thermique de l'eau vers l'air. Que vaut ce transfert thermique q lors du gel de 1 kg de glace?
3. Que vaudrait le transfert thermique Q cédé par la glace lors du gel de la totalité du lac? On donnera le résultat sous forme d'une puissance de 10 .
4. Dans l'hypothèse où $T_0(t)$ varie lentement (régime quasi-stationnaire), justifier que la température dans la glace (pour x variant de 0 à ℓ) peut s'écrire sous la forme

$$T(x) = ax + b,$$

où les constantes a et b sont à exprimer en fonction de T_0 , T_e et ℓ .

5. Entre les instants t et $t + dt$, $\ell(t)$ varie de $d\ell$. Exprimer, pour cet intervalle de temps dt , le transfert thermique δQ_1 cédé par l'eau lors de sa solidification, en fonction notamment de q .
6. Exprimer, pour ce même intervalle de temps, le transfert thermique conductif δQ_2 dans la couche de glace du bas vers le haut, en fonction notamment de la différence $T_e - T_0(t)$.
7. La continuité du flux thermique à l'interface glace-air impose $\delta Q_c = \delta Q_2$. En déduire l'expression de $T_0(t)$ en fonction de T_e , T_a , ℓ_0 et $\ell(t)$.

8. La continuité du flux thermique à l'interface glace-air impose $\delta Q_c = \delta Q_1$.

En déduire que $\ell(t)$ vérifie une équation différentielle de la forme

$$\frac{d\ell}{dt} + \frac{\ell}{\ell_0} \frac{d\ell}{dt} = v_0,$$

où v_0 est une constante homogène à une vitesse, que l'on exprimera en fonction de h, μ, q, T_e et T_a .

9. Intégrer l'équation précédente et montrer que $\ell(t)$ vérifie une équation du second degré.

10. En déduire l'expression de $\ell(t)$ tant que le lac n'est pas gelé dans sa totalité.

11. En fonction de ℓ_0 et v_0 , exprimer un temps caractéristique τ de l'évolution de $\ell(t)$, et en donner un ordre de grandeur sachant que v_0 est de l'ordre de $10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

12. En fonction de ℓ_0, λ, c_g et μ , exprimer un temps caractéristique τ' de la diffusion dans la glace sur la longueur ℓ_0 , et en donner un ordre de grandeur. Conclure sur l'hypothèse du régime quasi-stationnaire faite à la question 4.

III — Carbonatation de l'oxyde de baryum

Le carbonate de baryum solide $\text{BaCO}_3(\text{s})$ peut être formé à partir de l'oxyde de baryum solide $\text{BaO}(\text{s})$ et du dioxyde de carbone gazeux $\text{CO}_2(\text{g})$.

1. Écrire l'équation de la réaction de formation du carbonate de baryum à partir de $\text{BaO}(\text{s})$.

2. Calculer l'enthalpie standard de réaction de la réaction étudiée. Conclure.

3. Prévoir le signe de l'entropie standard de réaction, puis calculer sa valeur.

4. Exprimer la constante d'équilibre de cette réaction de carbonatation à 298 K en fonction des valeurs thermodynamiques obtenues précédemment. Application numérique.

5. Calculer la valeur de la pression partielle du CO_2 à l'équilibre, $P(\text{CO}_2)_{\text{éq}}$, à 298 K.

6. Sachant que la pression partielle du CO_2 dans l'air vaut $3,0 \times 10^{-4} \text{ bar}$, est-il possible de conserver de l'oxyde de baryum à l'air libre à 298 K?

7. On enferme maintenant une mole de $\text{BaCO}_3(\text{s})$ dans un récipient initialement vide de volume variable V . La température demeure constante et égale à 298 K.

Quel est l'effet d'une augmentation de volume à température et composition constante sur l'équilibre chimique précédemment étudié?

8. En déduire l'évolution de la quantité de matière de CO_2 dans l'enceinte en fonction de la valeur de V (V évoluant de 0 à ∞). Si l'évolution n'est pas monotone, on précisera la valeur de la quantité de matière de CO_2 au point de changement de pente.

Données

Enthalpies standard de formation et entropies molaires standard à 298 K :

constituant	$\text{BaCO}_3(\text{s})$	$\text{BaO}(\text{s})$	$\text{CO}_2(\text{g})$
$\Delta_f H^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	-1216	-553	-393
$S_m^\circ (\text{J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1})$	112	70	213