Phénomènes de transport — III — Transport de charge

Charges et courants

Densité volumique de charge électrique

Soit un volume mésoscopique $\mathrm{d}\tau_M$ centré en M, portant une charge $\delta q(t)$ à l'instant t. On définit la densité volumique de charge par

$$\boxed{\rho(M,t) = \frac{\delta q(t)}{\mathrm{d}\tau_M}}\,.$$

- La densité volumique de charge est une grandeur algébrique, qui s'exprime en $\mathrm{C\cdot m^{-3}}$.
- La charge totale portée par une volume $\mathcal{V}$ est $Q(t) = \iiint_{M\in\mathcal{V}} \rho(M,t)\,\mathrm{d}\tau_M$. Si $Q = 0$, la distribution est dite globalement neutre.
- Si $\rho(M,t) = 0$, $\forall M \in \mathcal{V}$, on a neutralité locale.

Dans le cas où le milieu comporte des particules de charge q, à la densité volumique $n(M,t)$, la densité volumique de charge est $\boxed{\rho(M,t) = qn(M,t)}$.

- On généralise à un milieu comportant plusieurs types de porteurs de charges :

$$\rho(M,t) = \sum_i q_i n_i(M,t)\,.$$

Vecteur densité de courant électrique

La charge $\delta Q(t)$ qui traverse une surface orientée $\mathrm{d}\overrightarrow{S}_M$ pendant la durée $\mathrm{d}t$ s'écrit

$$\delta Q(t) = \overrightarrow{\jmath}(M,t)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}_M\,\mathrm{d}t$$

où $\overrightarrow{\jmath}(M,t)$ est le vecteur densité de courant électrique.

- Le signe de δQ dépend du choix de l'orientation de la surface $\mathrm{d}\overrightarrow{S}_M$.

Dans le cas où le milieu comporte des particules de charge q, à la densité volumique $n(M,t)$, se déplaçant à la vitesse $\overrightarrow{v}(M,t)$, on a $\boxed{\overrightarrow{\jmath}(M,t) = qn(M,t)\overrightarrow{v}(M,t) = \rho(M,t)\overrightarrow{v}(M,t)}$.

- La vitesse prise en compte est la valeur moyenne de la vitesse des particules chargées. En particulier, la vitesse d'agitation thermique ne contribue pas au courant, car $\langle\overrightarrow{v}_{\mathrm{th}}\rangle = \overrightarrow{0}$.

Intensité du courant électrique

Soit $\delta Q(t)$ la charge traversant la surface orienté Σ pendant $\mathrm{d}t$. L'intensité électrique traversant Σ est définie par

$$I(t) = \frac{\delta Q(t)}{\mathrm{d}t}\,.$$

C'est une grandeur algébrique qui s'exprime en ampère (A).

- Le signe de $I(t)$ dépend du choix d'orientation de la surface Σ.

L'intensité s'écrit comme le flux du vecteur densité de courant électrique à travers la surface orientée Σ :

$$I(t) = \iint_{M\in\Sigma} \overrightarrow{\jmath}(M,t)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{S}_M\,.$$

- $\|\overrightarrow{\jmath}\|$ s'exprime en $\mathrm{A\cdot m^{-2}}$.

Conservation de la charge électrique

La charge électrique est une grandeur scalaire **extensive conservative**.

Bilan général de charge pour un système : $\mathrm{d}Q = \delta Q_{\text{reçu}}$, où $\mathrm{d}Q = Q(t+\mathrm{d}t) - Q(t)$ est la variation de la charge du système, et $\delta Q_{\text{reçu}}$ la charge algébriquement reçue pendant $\mathrm{d}t$ à travers sa frontière.
Cas unidimensionnel en coordonnées cartésiennes : $\rho(M,t) = \rho(x,t)$ et $\vec{j}(M,t) = j(x,t)\vec{e}_x$.
La conservation de la charge électrique s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}}.$$

La généralisation dans le cas tridimensionnel s'écrit

$$\boxed{\frac{\partial \rho(M,t)}{\partial t} = -\operatorname{div}\vec{j}(M,t)}.$$

Cas du régime stationnaire

Ligne de courant : courbe $\mathcal{C}$ telle que $\vec{j}(M,t)$ est tangent à $\mathcal{C}$ en tout point M de cette courbe.

Tube de courant : ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour Γ.

➤ Les surface latérale d'un fil conducteur forme un tube de courant.

Cas unidimensionnel en coordonnées cartésiennes : $\dfrac{\mathrm{d}j(x)}{\mathrm{d}x} = 0$, soit $j(x) = j_0$. Les lignes de courant sont les droites parallèles à $\vec{e}_x$. Un cylindre de section S d'axe Ox est un tube de courant; l'intensité traversant toute section est constante : $I(x) = I_0 = j_0 S$.

Cas général :

Le vecteur densité de courant est à flux conservatif en régime stationnaire :

$$\operatorname{div}\vec{j}(M) = 0 \iff \oiint_{M\in\Sigma} \vec{j}(M)\cdot \mathrm{d}\vec{S}_M = 0 \iff \begin{cases}\text{Le flux de } \vec{j} \text{ est le même à travers} \\ \text{toute section d'un tube de courant.}\end{cases}$$

➤ L'intensité est la même à travers toute section d'un tube de courant.

Un fil électrique matérialisant un tube de courant, on retrouve les résultats du régime continu :
— l'intensité électrique est la même en tout point d'un fil;
— on a la loi des nœuds : $\sum_k I_k = 0$ pour tous les courant arrivant à un nœud du circuit.

Conducteur ohmique

Loi d'ohm locale

Dans un conducteur ohmique, le vecteur densité de courant est proportionnel au champ électrique appliqué, source du courant électrique :

$$\vec{j}(M,t) = \gamma \vec{E}(M,t)$$

où $\gamma > 0$ est la conductivité électrique du milieu, s'exprimant en $\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ (ou $\mathrm{S}\cdot\mathrm{m}^{-1}$).

➤ On retiendra pour le cuivre $\gamma \approx 6\times 10^{7}\ \Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$.

➤ On définit la résistivité électrique [1] du milieu $\rho = \dfrac{1}{\gamma}$, en $\Omega\cdot\mathrm{m}$.

➤ La conductivité électrique est usuellement notée σ ou γ.

La loi d'Ohm est une loi phénoménologique, qui traduit une réponse $\vec{j}$ du milieu instantanée et proportionnelle à la cause $\vec{E}$ du courant. Elle n'est plus valide si la fréquence est très élevée.

1. Ne pas confondre avec la densité volumique de charge!

Modèle de Drude

C'est un modèle classique décrivant un conducteur métallique. Les hypothèses sont :

— les cations métalliques sont fixes ;

— les électrons de conduction, de charge $-\mathrm{e}$, de masse m et de densité volumique n, sont libres, sans interactions entre eux et avec le réseaux de cations ;

— les électrons de conduction interagissent avec les défauts du réseau métallique, subissant des collisions séparées d'une durée moyenne τ. Après chaque collision, leur vitesse a une direction aléatoire ;

— le métal est soumis à une champ électrique $\vec{E}$ variant avec une durée caractéristique $T \gg \tau$.

Dans le cadre de ce modèle, on établit

$$\boxed{\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{n\mathrm{e}^2\tau}{m}}.$$

➤ On peut modéliser les chocs des électrons avec les défauts par une force de « frottement fluide » $\vec{F} = -\dfrac{m}{\tau}\vec{v}$, où $\vec{v}$ est la vitesse de dérive des électrons.

Résistance d'un conducteur cylindrique

La résistance d'un conducteur cylindrique de longueur L, de section S et de conductivité électrique γ, parcouru par un courant électrique uniforme selon son axe est

$$\boxed{R = \frac{L}{\gamma S}}.$$

Puissance électrique, effet Joule

La puissance volumique reçue par un conducteur soumis à un champ électrique $\vec{E}$ est donnée par

$$\boxed{p_{\text{vol}} = \vec{j} \cdot \vec{E}}.$$

Dans le cas d'un **conducteur ohmique**, on a $p_{\text{vol}} = \gamma \vec{E}^2 = \dfrac{\vec{j}^2}{\gamma} > 0$: le conducteur *reçoit* effectivement de la puissance.

➤ Cette puissance est transférée au réseau métallique par les collisions, augmentant l'agitation thermique et donc la température : c'est l'**effet Joule**.

➤ La puissance reçue par un conducteur ohmique cylindrique de longueur L, de section S et de conductivité γ est $P_{\text{élec}} = \dfrac{L}{\gamma S} I^2 = RI^2$.

Mais qui était-il ?

Paul Drude (Brunswick 1863 - Berlin 1906).
Physicien allemand.
Spécialisé dans l'optique, il rédige un mémoire sur la réflexion et la diffraction de la lumière dans les cristaux. Il mesure avec précision les constantes optiques de divers solides. Il prend parti pour la récente théorie électromagnétique de la lumière. C'est lui qui introduit le symbole « c » pour désigner la vitesse de la lumière dans le vide.
Il étudie la conductivité électrique et les propriétés diélectriques d'un grand nombre de solutions aqueuses.
Il élabore une théorie des électrons dans les métaux basée sur le concept de « gaz d'électrons », s'inspirant de la thermodynamique classique.