DS nº 3 — Sujet de préparation nº 1 — solution

« S'il vous plait… dessine-moi un mouton ! » (CCINP MP)

1 Propriétés de la toison de la laine

Q1. Le flux thermique est donné par $\Phi = \vec{j}_Q \cdot \vec{S}$; cette grandeur est une puissance. Sachant que la puissance d'une force est $P = \vec{F} \cdot \vec{v}$. Le principe de la dynamique donne la dimension d'une force $[F] = MLT^{-2}$, d'où

$$[\Phi] = MLT^{-2}LT^{-1} = ML^2T^{-3}.$$

On a donc

$$j_Q = ML^2T^{-3}L^{-2} = MT^{-3}.$$

D'après la loi de Fourier $\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T$, on a

$$[j_Q] = [\lambda]\frac{\Theta}{L} = MT^{-3},$$

d'où

$$\boxed{[\lambda] = MLT^{-3}\Theta^{-1}}.$$

Q2. Par hypothèse on a $T(M,t) = T(z,t)$, d'où

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}}\, T = -\frac{\partial T}{\partial z}(z,t)\,\vec{e}_z.$$

Le vecteur $\vec{j}_Q$ est dirigé selon l'axe Oz est dépend de z et t.

Q3. Il s'agit d'une question de cours. On considère un tranche de section S, comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$ et on fait un bilan d'énergie pendant une durée $\mathrm{d}t$. En l'absence de source interne, on a

$$\mathrm{d}(\delta U) = \delta Q_{\text{reçu}}$$

avec

$$\mathrm{d}(\delta U) = \mu c S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}T = \mu c S \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$$

et

$$\begin{aligned}\delta Q_{\text{reçu}} &= \Phi(z,t)\,\mathrm{d}t - \Phi(z+\mathrm{d}z,t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\partial jQ}{\partial z} S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Après simplification, le bilan conduit à

$$\boxed{\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}.$$

Q4. En régime stationnaire, l'équation précédente devient

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 T(z)}{\mathrm{d}z^2} = 0}.$$

On a alors $\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = A$ constante, et

$$\vec{j}_Q = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\vec{e}_z = -\lambda A \vec{e}_z.$$

Le vecteur $\vec{j}_Q$ ne dépend pas de z en régime stationnaire.

Q5. On a vu que

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z} = \text{cte} = \frac{T(e) - T(0)}{e} = \frac{T_{\text{sortie}} - T_{\text{entrée}}}{e}$$

d'où

$$T(z) = \frac{T_{\text{sortie}} - T_{\text{entrée}}}{e} z + T_{\text{entrée}}.$$

On a alors

$$\vec{j}_Q = \lambda \frac{T_{\text{entrée}} - T_{\text{sortie}}}{e} \vec{e}_z.$$

Le flux à travers la section $S = HL$ vaut alors

$$\boxed{\varphi = \lambda HL \frac{T_{\text{entrée}} - T_{\text{sortie}}}{e}}.$$

Q6. La résistance thermique du matériau est définie par

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{T_{\text{entrée}} - T_{\text{sortie}}}{\varphi}}.$$

On en déduit d'après la question précédente

$$\boxed{R_{\text{th}} = \frac{e}{\lambda HL}}.$$

Deux résistances thermiques sont en série si les matériaux correspondants sont traversés par le même flux thermique.

Deux résistance thermiques sont en parallèle si les matériaux correspondants ont la même différence de température entre leurs faces d'entrée et de sortie.

Q7. Le flux thermique traversant l'échantillon de la plaque chaude vers la plaque froide est donné d'après les résultats précédents par

$$\varphi = \lambda_{\text{laine}} S \frac{T_{\text{c}} - T_{\text{f}}}{e},$$

d'où

$$\boxed{\lambda_{\text{laine}} = \frac{e\varphi}{S(T_{\text{c}} - T_{\text{f}})}}.$$

2 Équilibre thermique d'une brebis (situation de confort)

Q8. La carapace de laine est constituée de :

- 4 plaques de surface HL, chacune de résistance thermique $R_{\text{th},1}$;
- 2 plaques de surface H^2, chacune de résistance thermique $R_{\text{th},2}$.

Toutes les plaques ayant l'épaisseur e, on

$$R_{\text{th},1} = \frac{e}{\lambda_{\text{laine}} HL} \quad \text{et} \quad R_{\text{th},2} = \frac{e}{\lambda_{\text{laine}} H^2}.$$

Toutes ces plaques étant associées en parallèle, la résistance thermique R_{diff} de la carapace est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{1}{R_{\text{diff}}} = \frac{4}{R_{\text{th},1}} + \frac{2}{R_{\text{th},2}} &= \frac{4\lambda_{\text{laine}} HL}{e} + \frac{2\lambda_{\text{laine}} H^2}{e} \\ &= \frac{2\lambda_{\text{laine}} H(H+2L)}{e}\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{R_{\text{diff}} = \frac{e}{2\lambda_{\text{laine}} H(H+2L)}}\,.$$

Pour la brebis non tondue, on calcule en ordre de grandeur $\boxed{R_{\text{diff}} = 2\ \text{K}\cdot\text{W}^{-1}}$.

Pour la brebis tondue : $\boxed{R_{\text{diff}} = 9\times 10^{-2}\ \text{K}\cdot\text{W}^{-1}}$.

Q9. En notant S la surface extérieure totale de la carapace de laine, le flux conducto-convectif *vers l'extérieur* vaut

$$\varphi_{\text{cc}} = hS(T_{\text{ext}} - T_{\text{air}})\,.$$

La résistance thermique vaut par définition

$$R_{\text{cc}} = \frac{T_{\text{ext}} - T_{\text{air}}}{\varphi_{\text{cc}}} = \frac{1}{hS}\,.$$

La surface de la carapace valant

$$S = 4HL + 2H^2 = 2H(H+2L)$$

on en déduit

$$\boxed{R_{\text{cc}} = \frac{1}{2hH(H+2L)}}\,.$$

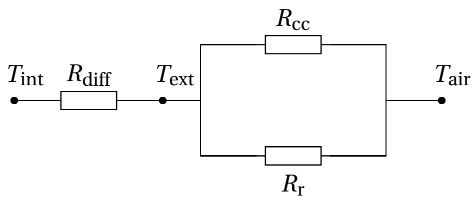
En ordre de grandeur $\boxed{R_{\text{cc}} = 0{,}2\ \text{K}\cdot\text{W}^{-1}}$.

Q10. La résistance thermique de rayonnement se calcule de la même façon que R_{cc} : il suffit de remplacer la constante h par la constante K :

$$\boxed{R_{\text{r}} = \frac{1}{2KH(H+2L)}}\,.$$

L'estimation non demandée donne $R_{\text{m}} = 0{,}1\ \text{K}\cdot\text{W}^{-1}$.

Q11. Le flux ϕ traverse la laine modélisée par la résistance R_{diff} aux bornes de laquelle on a les températures T_{int} et T_{ext}. Ce flux se partage ensuite entre un flux rayonné et un flux conducto-convectif, ces deux termes étant modélisés par les résistances R_{cc} et R_{r} aux bornes desquelles on a les mêmes températures T_{ext} et T_{air}. Les résistances R_{cc} et R_{r} sont donc disposées en parallèle. On en déduit le schéma électrique équivalent :



La résistance équivalent est donc donnée par

$$\boxed{R = R_{\text{diff}} + \frac{R_{\text{cc}}R_{\text{r}}}{R_{\text{cc}} + R_{\text{r}}}}\,.$$

Pour la brebis non tondue : $\boxed{R_1 = 1{,}9\ \text{K}\cdot\text{W}^{-1}}$.

Pour la brebis tondue : $\boxed{R_2 = 0{,}17\ \text{K}\cdot\text{W}^{-1}}$.

Q12. La puissance apportée par le métabolisme doit compenser :

— le flux thermique à travers la résistance thermique totale, soit $\dfrac{T_{\text{in}} - T_{\text{air}}}{R_1}$;

— l'énergie libérée par l'évaporation de l'eau. Pendant $\text{d}t$, une masse $\text{d}m = \dot{m}\,\text{d}t$ s'évapore, libérant l'énergie $\delta Q = \text{d}m\Delta H^\circ_{\text{vap}} = \dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}\,\text{d}t$. La puissance correspondant est donc $\dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}$.

On en déduit

$$\boxed{p_{\text{m}0} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{air}}}{R_1} + \dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}}\,.$$

On calcule $\boxed{p_{\text{m}0} = 18\ \text{W}}$.

Q13. Quand la brebis est tondue, il faut considérer la résistance thermique R_2 au lieu de R_1, d'où [1]

$$\boxed{p_{\text{m}0} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{air}}}{R_2} + \dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}}\,.$$

On calcule $\boxed{p_{\text{m}0} = 200\ \text{W}}$.

3 Déséquilibre thermique d'une brebis (situation de stress et de danger)

Q14. Considérons comme système la brebis non tondue, et effectuons un bilan d'énergie entre t et $t+\text{d}t$. Le volume de la brebis est H^2L, et sa température varie de $\text{d}T$, donc

$$\text{d}U = \delta Q_{\text{métabolisme}} + \delta Q_{\text{flux}} + \delta Q_{\text{évap}}$$

On a d'une part

$$\text{d}U = \mu c H^2 L\,\text{d}T\,.$$

La température de la brebis étant $T(t)$, les pertes thermiques sont données

$$\delta Q_{\text{flux}} = -\frac{T(t) - T_{\text{air}}}{R_1}\,.$$

On a de plus

$$\delta Q_{\text{métabolisme}} = p_{\text{m}}\,\text{d}t \quad\text{et}\quad \delta Q_{\text{évap}} = -\dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}\,.$$

Le bilan s'écrit alors

$$\mu c H^2 L\text{d}T = p_{\text{m}}\,\text{d}t - \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{R_1}\,\text{d}t - \dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}\,\text{d}t$$

soit

$$\mu c H^2 L\frac{\text{d}T}{\text{d}t} + \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{R_1} = p_{\text{m}} - \dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}\,.$$

On a montré à la question **12** que dans la situation de confort où $T_{\text{int}} = \theta_{\text{éq}}$ et $T_{\text{air}} = T_0$, le métabolisme vérifie

$$p_{\text{m}0} = \frac{\theta_{\text{éq}} - T_0}{R_1} + \dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}\,.$$

On peut alors substituer $\dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}$, et le bilan s'écrit

$$\mu c H^2 L\frac{\text{d}T}{\text{d}t} + \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{R_1} = p_{\text{m}} - p_{\text{m}0} + \frac{\theta_{\text{éq}} - T_0}{R_1}\,,$$

soit

$$\boxed{\frac{\text{d}T}{\text{d}t} + \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{\mu c H^2 L R_1} = \frac{(p_{\text{m}} - p_{\text{m}0})R_1 + \theta_{\text{éq}} - T_{\text{air}}}{\mu c H^2 L R_1}}\,.$$

On obtient l'expression proposée avec

$$\boxed{\tau_1 = \mu c H^2 L R_1}$$

et

$$\boxed{(T_1 - T_{\text{air}}) = (p_{\text{m}} - p_{\text{m}0})R_1 + \theta_{\text{éq}} - T_0}\,.$$

1. On garde $\dot{m}$ car la température n'est pas supérieure à 5,1 °C.

Q15. Posons $\theta(t) = T(t) - T_{\text{air}}$. L'équation différentielle s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \frac{\theta(t)}{\tau_1} = \frac{T_1 - T_{\text{air}}}{\tau_1}.$$

La solution générale s'écrit

$$\theta_(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + (T_1 - T_{\text{air}}),$$

soit

$$T(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1} + T_1.$$

On a $T(0) = \theta_{\text{éq}} = A + T_1$, d'où

$$\boxed{T(t) = T_1 + (\theta_{\text{éq}} - T_1)\,\mathrm{e}^{-t/\tau_1}}.$$

Q16. On calcule $\boxed{\tau_1 = 7{,}2 \times 10^5\ \text{s} \approx 8\ \text{jours}}$.
Quand $p_{\text{m}} = p_{\text{m0}}$, on obtient

$$T_1 = T_{\text{air}} + \theta_{\text{éq}} - T_0 = 17 + 39 - 5$$

soit $\boxed{T_1 = 51\ °\text{C}}$.

Q17. À la question **12**, on a établi l'expression du métabolisme quand la température de l'air vaut $T_{\text{air}} = T_0$:

$$p_{\text{m0}} = \frac{T_{\text{int}} - T_0}{R_1} + \dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}.$$

Quand la température extérieure est différente, le métabolisme en régime permanent est donné par

$$p_{\text{m}} = \frac{T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}}{R_1} + \dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}.$$

On en déduit

$$p_{\text{m}} = p_{\text{m0}} + \frac{T_0 - T_{\text{air}}}{R_1}.$$

➤ Si $T_{\text{air}} < T_0$ on a bien $p_{\text{m}} > p_{\text{m0}}$: le métabolisme doit augmenter quand la température de l'air diminue.

Avec $T_{\min} \leqslant T_{\text{air}} \leqslant T_{\max}$, on en déduit l'encadrement

$$\boxed{p_{\text{m0}} + \frac{T_0 - T_{\max}}{R_1} \leqslant p_{\text{m}} \leqslant p_{\text{m0}} + \frac{T_0 - T_{\min}}{R_1}}.$$

On calcule

$$\boxed{13\ \text{W} \leqslant p_{\text{m}} \leqslant 25\ \text{W}}.$$

Q18. Il faut considérer la résistance thermique R_2 pour la brebis tondue. De plus, comme $T_{\text{air}} > 5\ °\text{C}$, il faut ajouter la puissance $\dot{m}'\Delta H^\circ_{\text{vap}} = 2\dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}$ à la puissance évacuée par transpiration. Le bilan de puissance établi à la question **14.a** s'écrit alors

$$\mu c H^2 L\,\mathrm{d}T = p_{\text{m}}\,\mathrm{d}t - \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{R_2}\,\mathrm{d}t - 3\dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}\,\mathrm{d}t,$$

d'où

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{\mu c H^2 L R_2} = \frac{p_{\text{m}} - 3\dot{m}\Delta H^\circ_{\text{air}}}{\mu c H^2 L}.$$

On a toujours la relation

$$p_{\text{m0}} = \frac{\theta_{\text{éq}} - T_0}{R_1} + \dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}.$$

En substituant $\dot{m}\Delta H^\circ_{\text{vap}}$, le bilan s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{\mu c H^2 L R_2} = \frac{R_2(p_{\text{m}} - 3p_{\text{m0}}) + 3(\theta_{\text{éq}} - T_0)R_2/R_1}{\mu c H^2 L R_2}}.$$

On obtient l'expression proposée avec

$$\boxed{\tau_2 = \mu c H^2 L R_2}$$

et

$$\boxed{(T_2 - T_{\text{air}}) = R_2(p_{\text{m}} - 3p_{\text{m0}}) + 3(\theta_{\text{éq}} - T_0)\frac{R_2}{R_1}}.$$

On en déduit

$$\boxed{\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{R_2}{R_1}}.$$

On calcule $\boxed{\dfrac{\tau_2}{\tau_1} = 9 \times 10^{-2}}$.

On a $\tau_2 \ll \tau_1$: la brebis tondue atteint la température extérieure beaucoup plus rapidement que la brebis non tondue. Si l'extérieur est trop froid ou trop chaud, elle risque donc un coup de froid ou un coup de chaud.
La température atteinte est

$$T_2 = T_{\text{air}} + R_2(3p_{\text{m}} - p_{\text{m0}}) + 3(\theta_{\text{éq}} - T_0)\frac{R_2}{R_1}.$$

La brebis étant dans de bonnes conditions si $T_2 = \theta_{\text{éq}}$, la température de l'air vérifie alors

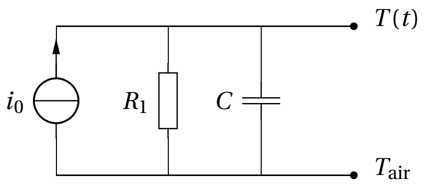
$$T_{\text{air}} = \theta_{\text{éq}} - R_2(p_{\text{m}} - 3p_{\text{m0}}) - 3(\theta_{\text{éq}} - T_0)\frac{R_2}{R_1}.$$

Pour $p_{\text{m}} = 13\ \text{W}$, on calcule $\boxed{T_{\text{air}} = 36{,}8\ °\text{C}}$.

Q19. La situation (1) est régie par l'équation différentielle

$$\mu c H^2 L\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{R_1} = \frac{T_1 - T_{\text{air}}}{R_1}.$$

Le terme $\mu c H^2 L\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$ est formellement identique à l'intensité parcourant un condensateur : $i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$. Chaque terme de l'équation différentielle peut être équivalent à un courant, cette équation traduisant la loi des nœuds pour le schéma électrique suivant :



On obtient

$$i_0 = \frac{T(t) - T_{\text{air}}}{R_1} + C\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t}.$$

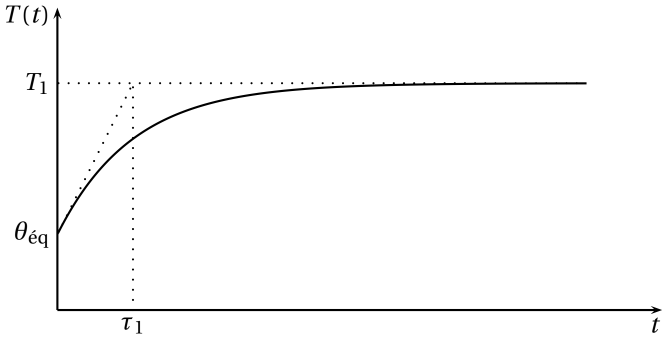
Les grandeurs caractéristiques du montage sont donc

$$\boxed{i_0 = \frac{T_1 - T_{\text{air}}}{R_1}} \quad \text{et} \quad \boxed{C = \mu c H^2 L}.$$

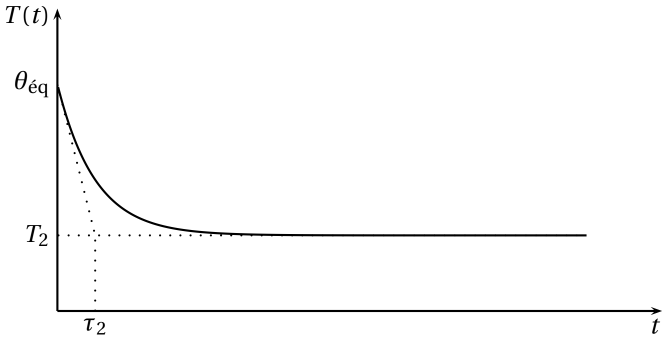
La résistance est égale à la résistance thermique R_1 et les potentiels aux températures $T(t)$ et T_{air}.
La situation (2) correspond au même schéma électrique, avec

$$i'_0 = \frac{T_2 - T_{\text{air}}}{R_2}$$

la résistance étant R_2.
Dans le cas de la brebis non tondue, avec $T_{\text{air}} = 17\ °\text{C}$ et $p_{\text{m}} = p_{\text{m0}}$, on obtient $T_1 = T_{\text{air}} + \theta_{\text{éq}} - T_0 = 51\ °\text{C}$.



Dans le cas de la brebis tondue, on a $T_2 = T_{\text{air}} + 2{,}6 = 27{,}6$ °C.



4 Réponse d'un groupe de brebis

Q20. La surface de l'extrémité d'une brebis est H^2. La surface d'un côté latéral est $HL = H^2X$.

Pour chaque cas, nous regardons quelle surface en contact avec l'air a été « supprimée ».

Cas 1 On supprime 2×5 extrémités, soit une surface $10H^2$.

Cas 1′ On supprime 2×5 faces latérales, soir une surface $10H^2X$.

Cas 2 On supprime 3×2 extrémités et 2×4 faces latérales, soit une surface $8H^2 + 6H^2X$.

Cas 2′ On supprime 2×4 faces latérales et 2×3 extrémités, soit une surface $6H^2 + 8H^2X$.

Tableau récapitulatif :

Cas i	1	$1'$	2	$2'$
$S - S_i$	$10H^2$	$10H^2X$	$2H^2(4+3X)$	$2H^2(3+4X)$
$X = 3{,}3$	$10H^2$	$33H^2$	$27{,}8H^2$	$32{,}4H^2$

La conductance étant proportionnelle à la surface de contact avec l'air, **le cas de plus faible conductance thermique est le cas 1′.** Les brebis ont donc intérêt a adopter cette configuration.

Le flux thermique étant proportionnel à la surface de contact avec l'air, la diminution relative moyenne de flux, et donc de métabolisme, est

$$\frac{S_0 - S_{1'}}{S_0}.$$

On a $S_0 = 6 \times (2H^2 + 4HL) = 12H^2(1+2X)$. Comme $S_0 - S_{1'} = 10H^2X$, on a

$$\frac{S_0 - S_{1'}}{S_0} = \frac{10H^2X}{12H^2(1+2X)} = \frac{5X}{6(1+2X)} = 0{,}36.$$

Le regroupement entraîne une diminution de métabolisme de 36 %.

Les brebis aux extrémités de la configuration présentent une plus grande surface de contact avec l'air que celle qui sont au milieu ; elles ont donc intérêt à changer de place de temps en temps pour ne pas se refroidir plus vite que leurs congénères.