DS n° 3 — Sujet de préparation n° 2

De la physique dans le tunnel du Fréjus (Mines)

À l'exception de i tel que $i^2 = -1$, les nombres complexes sont soulignés. La notation $\overline{\underline{z}}$ désigne le complexe conjugué de $\underline{z}$. Les vecteurs seront traditionnellement surmontés d'une flèche, par exemple $\vec{j}$ pour un flux surfacique, sauf s'ils sont unitaires, et seront alors surmontés d'un chapeau, par exemple $\widehat{e}_z$ tel que $\|\widehat{e}_z\| = 1$. Pour les applications numériques, on utilisera 3 chiffres significatifs.

Le tunnel routier de Fréjus relie la vallée de l'Arc, en France, au val de Suse, en Italie. Long d'environ 13 km, le tunnel passe sous le col du Fréjus dans les Alpes contiennes. La point Fréjus culmine à une altitude de 2934 m.

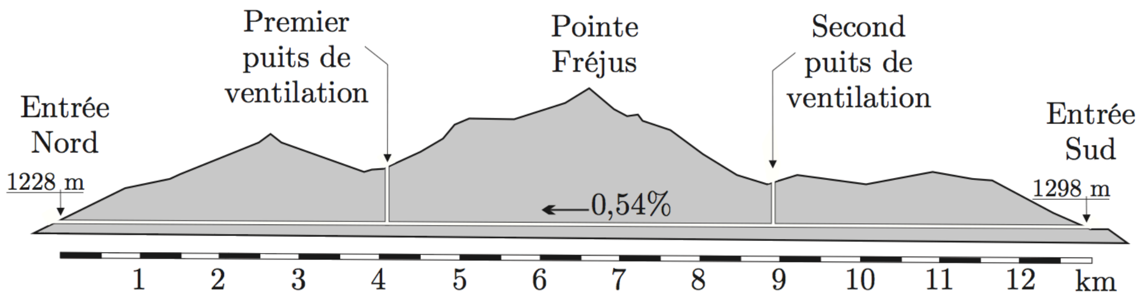

FIGURE 1 – Tunnel de Fréjus

La roche environnante dans le tunnel a une température constante tout au long de l'année d'environ 30 °C. Dans un premier temps, nous étudierons les évolutions saisonnières de la température dans le sol. Puis nous tenterons d'expliquer cette température élevée par un modèle géophysique.

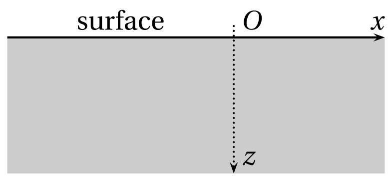

FIGURE 2 – Sol

1 — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

On se place au sommet de la pointe Fréjus à une altitude de 2934 km. On assimile la roche à un milieu semi-infini de conductivité thermique κ, de masse volumique ρ_s et de capacité thermique massique c_s. Sa surface est place et horizontale et est soumise à la variation de température extérieure

$$T(z=0,t) = \theta_0 + T_0\cos(\omega t)$$

avec $\theta_0 = 0$ °C (voir figure 2).

1. Calculer la moyenne temporelle de la température extérieure en $z = 0$. Calculer la température maximale et minimale. Proposer une valeur numérique pour T_0 pour les évolutions annuelles de température.

2. La quantité d'énergie traversant une surface élémentaire dS pendant dt, est noté δQ. Rappeler la définition du vecteur $\vec{j}_Q$, densité de flux thermique. Quelle est sa dimension ?

3. Rappeler la loi de Fourier, ainsi que ses conditions d'application. En déduire les dimensions de la conductivité thermique κ.

4. On étudie une tranche mésoscopique de sol comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$, de surface S. Quelle est l'énergie thermique δQ reçue par cette tranche entre t et $t + \mathrm{d}t$?

5. Pourquoi étudie-t-on une tranche « mésoscopique » ?

6. Établir l'expression de sa variation d'énergie interne dU en fonction de $\dfrac{\partial j_Q}{\partial z}$ et S, puis en fonction de ρ_s, c_s, S et $\dfrac{\partial T}{\partial t}$.

7. En déduire l'équation de la chaleur à une dimension

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}$$

dans laquelle on précisera l'expression et la dimension du coefficient D de diffusion thermique.

On cherche des solutions de la forme

$$\underline{T}(z,t) = \theta_0 + T_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)}$$

vérifiant la condition aux limites $T(z=0,t) = \theta_0 + T_0\cos(\omega t)$.

8. Interpréter cette forme de solution. En écrivant que $\underline{T}(z,t)$ vérifie l'équation de la chaleur, donner la relation entre $\underline{k}^2$ et ω. En déduire[1] l'expression de $\underline{k}$ que l'on mettre sous la forme $\underline{k} = k' + \mathrm{i}k''$, avec $k' > 0$.
Déterminer l'expression correspondante de la solution réelle $T(z,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{T}(z,t)\right]$.
Quelle est l'interprétation physique de k'' ? Montrer que l'on peut définir une longueur caractéristique δ que l'on exprimera en fonction de k'' d'une part, puis de ω et D d'autre part, dont on donnera l'interprétation physique.

9. Calculer la profondeur z_e à partir de laquelle les oscillations annuelles de température ne s'écartent pas de θ_0 de plus de 1 %. Que peut-on dire de la température dans le tunnel routier de Fréjus ? Pour les roches granitiques constituant le Fréjus on donne $\rho_s = 2{,}65 \times 10^3\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $c_s = 8{,}50 \times 10^3\ \mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot kg^{-1}}$ et $\kappa = 3{,}00$ SI.

10. Que peut-on dire des variations quotidiennes de la température à la profondeur z_e ? En terme de filtrage fréquentiel, comment se comporte le sol ?

2 — Température d'origine géophysique

La température moyenne de 30 °C relevée dans le tunnel de Fréjus peut être expliquée par un modèle géothermique simple de la croûte terrestre. On considère qu'au niveau des Alpes, l'épaisseur de la croûte terrestre continentale est $L_c = 45{,}0$ km. Les roches granitiques qui constituent une partie des Alpes contiennent des éléments radioactifs comme l'uranium, le thorium et le potassium. La chaleur produite par ces éléments radioactifs est directement proportionnelle à leur concentration.
Dans les modèles couramment utilisés cette concentration décroît exponentiellement avec la profondeur, de sorte que la puissance volumique dégagée peut s'écrire $\mathcal{P}(z) = \mathcal{P}_0\,\mathrm{e}^{-z/H}$, avec $H = 10{,}0$ km. On prendra $\mathcal{P}_0 = 2{,}50\ \mathrm{\mu W \cdot m^{-3}}$. La croûte terrestre repose sur le manteau terrestre, à la fois plus dense et plus chaud que la croûte. On admet enfin qu'au niveau de l'interface $\mathcal{I}_{c/m}$ entre la croûte et le manteau, ce dernier génère un flux surfacique constant $\vec{j}_m = -j_m\widehat{e}_z$, avec $j_m = 35{,}0\ \mathrm{mW \cdot m^{-2}}$.

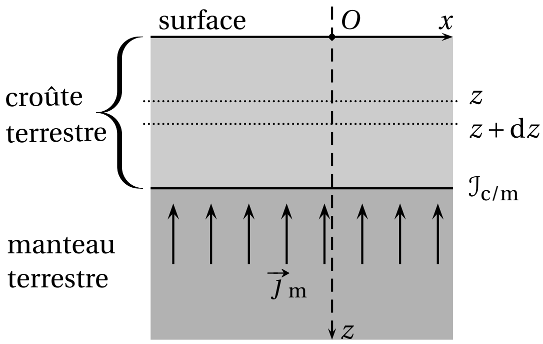

FIGURE 3 – Modèle géostrophique

11. En effectuant, *en régime stationnaire*, le bilan thermique dans une tranche de croûte terrestre de surface S, comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$, établir une relation entre $j_Q(z,t)$ et $\mathcal{P}(z)$.

12. En déduire la température $T(z)$ en fonction de H, L_c, $\mathcal{P}_0$, j_m, κ et $\theta_0 = 0$ °C la température moyenne de surface en $z = 0$.

13. Exprimer le flux thermique total $\vec{j}_S = j_S\widehat{e}_z$ au niveau de la surface en $z = 0$.

14. Comparer les deux termes proportionnels à z et simplifier l'expression de $T(z)$. Calculer la température au centre du tunnel de Fréjus ($z = 1{,}70$ km) puis j_S.

3 — Prise en compte du relief

On suppose maintenant que la température à la surface plane $z = 0$ possède une dépendance spatiale en x que l'on modélise par la relation

$$T(x, z=0) = T_s + T_1\cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right).$$

Pour étudier l'effet du relief sur la température dans le tunnel de Fréjus, on prendra $\lambda = 10{,}0$ km.

15. On suppose pour cette question qu'il n'y a pas de source d'énergie thermique dans la roche. Donner sans démonstration l'équation satisfaite par $T(x,z)$ en régime stationnaire. En utilisant la méthode de séparation des variables, déterminer la solution $T(x,z)$ qui respecte la condition aux limites $T(x, z=0)$ et qui demeure finie lorsque $z \to +\infty$. Justifier la prise en compte des effets de la variation spatiale de la température.
Indication : la méthode de séparation des variables consiste à chercher une solution du problème sous la forme $T(x,z) = f(x)g(z) + T_s$.

16. Toujours pour une surface plane d'équation $z = 0$, en utilisant la linéarité de l'équation satisfaite par la température, déterminer $T(x,z)$ en considérant les sources internes d'énergie thermique.

1. On rappelle que $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$...