DS n° 3 — Sujet de préparation n° 2 — solution

De la physique dans le tunnel du Fréjus (Mines)

1 — Évolutions saisonnières de la température dans le sol

1. La moyenne temporelle de la température extérieure est $\boxed{\langle T(z=0,t)\rangle = \theta_0}$.
Comme $-1 \leqslant \cos(\omega t) \leqslant 1$, on a

$$\boxed{T_{\min} = \theta_0 - T_0} \quad \text{et} \quad \boxed{T_{\max} = \theta_0 + T_0}.$$

Ordre de grandeur réaliste pourrait être $\boxed{T_0 = 15\ °\mathrm{C}}$.

2. Par définition du vecteur densité de flux thermique

$$\boxed{\delta Q = \vec{j_Q}\cdot \mathrm{d}\vec{S}\,\mathrm{d}t},$$

où $\mathrm{d}\vec{S} = \vec{n}\,\mathrm{d}S$, $\vec{n}$ étant le vecteur unitaire normal à $\mathrm{d}S$, dirigé dans le sens de l'orientation de la surface.
Dimensionnellement :

$$[j_Q] = \frac{\text{énergie}}{\text{surface} \times \text{temps}} = \frac{ML^2T^{-2}}{L^2T}$$

soit $\boxed{[j_Q] = MT^{-3}}$.

3. La loi de Fourier s'écrit $\boxed{\vec{j_Q} = -\kappa\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,T}$.
Elle est valable dans un milieu isotrope, pour des variations de température ni trop faibles, si trop grandes, ni trop rapides.
Dimensionnellement, la loi de Fourier s'écrit

$$MT^{-3} = [\kappa]\Theta L^{-1}$$

d'où $\boxed{[\kappa] = MLT^{-3}\Theta^{-1}}$.

4. L'énergie thermique reçue entre t et $t+\mathrm{d}t$ par la tranche comprise entre z et $z+\mathrm{d}z$ s'écrit

$$\delta Q = j_Q(z,t)S\,\mathrm{d}t - j_Q(z+\mathrm{d}z,t)S\,\mathrm{d}t,$$

soit

$$\boxed{\delta Q = -\frac{\partial j_Q(z,t)}{\partial z}S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t}.$$

5. Une tranche « mésoscopique » est :

— suffisamment grande pour comprendre un grand nombre d'atomes de façon à pouvoir définir la température ;

— suffisamment petite pour que l'on puisse considérer la température comme uniforme en son sein.

6. Le bilan d'énergie entre t et $t+\mathrm{d}t$ s'écrit en l'absence de source

$$\mathrm{d}U = \delta Q,$$

soit compte tenu de l'expression de δQ établie précédemment

$$\boxed{\mathrm{d}U = -\frac{\partial j_Q}{\partial z}S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t}. \qquad (1)$$

La tranche, de volume $\mathrm{d}\tau = S\,\mathrm{d}z$, a une capacité thermique $c_s\rho_s\,\mathrm{d}\tau$. Lorsque sa température varie de

$$\mathrm{d}T = T(z,t+\mathrm{d}t) - T(z,t) = \frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}t,$$

son énergie interne varie de

$$\mathrm{d}U = c_s\rho_s\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}T$$

soit

$$\boxed{\mathrm{d}U = \rho_s c_s\frac{\partial T}{\partial t}S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t}. \qquad (2)$$

7. D'après les équations (1), (2) et la loi de Fourier, on a

$$\rho_s c_s\frac{\partial T}{\partial t}S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}j_Q}{\mathrm{d}z}S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t = \kappa\frac{\mathrm{d}^2T(z,t)}{\mathrm{d}z^2}S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{D = \frac{\kappa}{\rho_s c_s}}.$$

Par analyse dimensionnelle de l'équation de la chaleur, on a $\boxed{[D] = L^2T^{-1}}$.

8. La forme de la solution proposée est **harmonique**, à la pulsation forcée de la température à la surface du sol, et ondulatoire avec un terme **progressif** $\omega t - \underline{k}z$. Elle vérifie la condition limite imposée en $z = 0$.
Écrivons que $\underline{T}(z,t)$ vérifie l'équation de la chaleur :

$$\mathrm{i}\omega T_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - \underline{k}z)} = -\underline{k}^2 D\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t-\underline{k}z)},$$

d'où

$$\boxed{\underline{k}^2 = -\frac{\mathrm{i}\omega}{D}}.$$

Comme $-\mathrm{i} = \mathrm{e}^{-\pi/2}$, on peut écrire

$$\underline{k}^2 = \frac{\omega}{D}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/2}$$

d'où

$$\underline{k} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{D}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}.$$

Comme $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}$, on a

$$\underline{k} = \pm\sqrt{\frac{\omega}{D}}\,\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}.$$

On cherche à écrire $\underline{k} = k' + \mathrm{i}k''$, avec $k' > 0$; il faut donc choisir le signe « + », et on peut écrire

$$\boxed{\underline{k} = k' + \mathrm{i}k''} \quad \text{avec} \quad \boxed{k' = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}} \quad \text{et} \quad \boxed{k'' = -\sqrt{\frac{\omega}{2D}}}.$$

La solution s'écrit sous forme complexe

$$\underline{T}(z,t) = \theta_0 + T_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k'z - \mathrm{i}k''z)} = \theta_0 + T_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k'z)}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}^2 k''z} = \theta_0 + T_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k'z)}\,\mathrm{e}^{k''z}\,.$$

La solution réelle donnée par $T(z,t) = \mathrm{Re}\left[\underline{T}(z,t)\right]$ s'écrit

$$\boxed{T(z,t) = \theta_0 + T_0\,\mathrm{e}^{k''z}\cos(\omega t - k'z)}\,,$$

soit en remplaçant k' et k'' par leurs expressions,

$$\boxed{T(z,t) = \theta_0 + T_0\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\frac{\omega}{2D}}z}\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2D}}\right)}\,.$$

Le terme $k'' < 0$ traduit l'**amortissement** de l'onde de température : son amplitude diminue exponentiellement avec la profondeur z.

On peut écrire

$$\mathrm{e}^{k''z} = \mathrm{e}^{-\frac{x}{\delta}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta = \sqrt{\frac{2D}{\omega}}}\,.$$

La longueur caractéristique de la diminution de l'amplitude de l'onde de température est δ.

9. La profondeur z_e est telle que $\mathrm{e}^{-z_\mathrm{e}/\delta} = 0{,}1$. On a donc

$$z_\mathrm{e} = -\delta\ln(0{,}01) = \delta\ln(100)\,,$$

soit

$$z_\mathrm{e} = \ln(100)\sqrt{\frac{2D}{\omega}} = \ln(100)\sqrt{\frac{2\kappa T}{\rho_\mathrm{s} c_\mathrm{s} 2\pi}} = \ln(100)\sqrt{\frac{\kappa T}{\rho_\mathrm{s} c_\mathrm{s}\pi}}$$

avec $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 1$ an.

On calcule

$$z_\mathrm{e} = \ln(100)\sqrt{\frac{3{,}00\times 365\times 24\times 3600}{2{,}65\times 10^3\times 8{,}500\times 10^3\times\pi}}$$

d'où $\boxed{z_\mathrm{e} = 5{,}32\ \mathrm{m}}$.

Le tunnel du Fréjus étant à une profondeur très supérieure à z_e, on peut en déduire que **la température reste constante tout au long de l'année dans le tunnel**.

10. Pour $T' = 24$ h, la nouvelle profondeur caractéristique est $\delta' = \sqrt{\dfrac{\kappa T'}{\rho_\mathrm{s} c_\mathrm{s}\pi}}$. On a donc

$$\frac{z_\mathrm{e}}{\delta'} = \ln(100)\sqrt{\frac{\kappa T}{\rho_\mathrm{s} c_\mathrm{s}\pi}}\sqrt{\frac{\rho_\mathrm{s} c_\mathrm{s}\pi}{\kappa T'}} = \sqrt{\frac{T}{T'}}\ln(100) = \sqrt{365}\ln(100)\,,$$

d'où $\mathrm{e}^{-z_\mathrm{e}/\delta'} = \mathrm{e}^{-\ln(100)\sqrt{365}} \approx 6\times 10^{-39} \ll 1$.

Les variations quotidiennes de la température ne sont pas perceptibles à la profondeur z_e (à laquelle on ne perçoit que 1 % des variations annuelles). Le sol se comporte comme un **filtre passe-bas**.

2 — Température d'origine géophysique

11. En régime stationnaire, le bilan d'énergie pour la tranche de croûte terrestre de surface S, comprise entre z et $z + \mathrm{d}z$ s'écrit, entre t et $t + \mathrm{d}t$,

$$\mathrm{d}U = 0 = \delta Q_\text{reçu} + \delta Q_\text{créé}\,.$$

On a d'une part comme précédemment

$$\delta Q_\text{reçu} = j_Q(z,t)S\,\mathrm{d}t - j_A(z+\mathrm{d}z,t)S\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}j_Q(z,t)}{\mathrm{d}z}S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t\,.$$

D'autre part

$$\delta Q_\text{créé} = \mathcal{P}(z)S\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t\,.$$

Le bilan d'énergie conduit donc à

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}j_Q(z,t)}{\mathrm{d}z} = \mathcal{P}(z)}\,.$$

12. L'équation précédente s'écrit

$$\mathrm{d}j_Q = \mathcal{P}_0\,\mathrm{e}^{-z/H}\,\mathrm{d}z\,.$$

La condition aux limites étant $j_Q(L_\mathrm{c}) = -j_\mathrm{m}$, on peut écrire

$$\int_{-j_\mathrm{m}}^{j_Q(z)}\mathrm{d}j_Q = \mathcal{P}_0\int_{L_\mathrm{c}}^{z}\mathrm{e}^{-z'/H}\,\mathrm{d}z'$$

soit

$$j_Q(z) + j_\mathrm{m} = \mathcal{P}_0\left[-H\,\mathrm{e}^{-z'/H}\right]_{L_\mathrm{c}}^{z} = -\mathcal{P}_0 H\left[\mathrm{e}^{z/H} - \mathrm{e}^{-L_\mathrm{c}/H}\right].$$

On en déduit

$$j_Q(z) = -j_\mathrm{m} + \mathcal{P}_0 H\,\mathrm{e}^{-L_\mathrm{c}/H} - \mathcal{P}_0 H\,\mathrm{e}^{-z/H}\,.$$

En utilisant la loi de Fourier $j_Q = -\kappa\dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}$, on a

$$\mathrm{d}T = \left(\frac{j_\mathrm{m}}{\kappa} - \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa}\,\mathrm{e}^{-L_\mathrm{c}/H}\right)\mathrm{d}z + \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa}\,\mathrm{e}^{-z/H}\,\mathrm{d}z\,.$$

Avec la condition aux limites $T(z=0) = \theta_0$, on peut écrire

$$\int_{\theta_0}^{T(z)}\mathrm{d}T = \left(\frac{j_\mathrm{m}}{\kappa} - \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa}\,\mathrm{e}^{-L_\mathrm{c}/H}\right)\int_0^z\mathrm{d}z' + \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa}\int_0^z\mathrm{e}^{-z'/H}\,\mathrm{d}z'\,,$$

soit

$$T(z) - \theta_0 = \left(\frac{j_\mathrm{m}}{\kappa} - \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa}\,\mathrm{e}^{-L_\mathrm{c}/H}\right)z + \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa}\left[\mathrm{e}^{-z'/H}\right]_0^z.$$

La température s'écrit donc

$$\boxed{T(z) = \theta_0 + \left(\frac{j_\mathrm{m}}{\kappa} - \frac{\mathcal{P}_0 H}{\kappa}\,\mathrm{e}^{-L_\mathrm{c}/H}\right)z + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa}\left[1 - \mathrm{e}^{-z/H}\right]}\,.$$

13. En utilisant l'expression de $j_Q(z)$ obtenue précédemment, le flux $j_S = j_Q(z=0)$ s'écrit

$$\boxed{j_S = -j_\mathrm{m} + \mathcal{P}_0 H\left[\mathrm{e}^{-L_\mathrm{c}/H} - 1\right]}\,.$$

14. Comparons j_m et $\mathcal{P}_0 H \mathrm{e}^{-L_\mathrm{c}/H}$.
On a

$$\mathcal{P}_0 H \mathrm{e}^{-L_\mathrm{c}/H} = 2{,}50 \times 10^{-6} \times 10{,}0 \times 10^3 \times \mathrm{e}^{-\frac{45}{10}} = 2{,}78 \times 10^{-4}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}.$$

Avec $j_\mathrm{m} = 35{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}$, on remarque que

$$\boxed{\frac{\mathcal{P}_0 H \mathrm{e}^{-L_\mathrm{c}/H}}{j_\mathrm{m}} \approx 8 \times 10^{-3} \ll 1}.$$

On peut donc négliger $\mathcal{P}_0 \mathrm{e}^{-L_\mathrm{c}/H}$ devant j_m et écrire la température sous la forme

$$\boxed{T(z) = \theta_0 + \frac{j_\mathrm{m}}{\kappa} z + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa}\left[1 - \mathrm{e}^{-z/H}\right]}.$$

À la profondeur $z = 1{,}70$ km, on calcule alors

$$T(z) = \frac{35{,}0 \times 10^{-3}}{3{,}00} \times 1{,}70 \times 10^3 + \frac{2{,}50 \times 10^{-6} \times (10{,}0 \times 10^3)^2}{3{,}00}\left[1 - \mathrm{e}^{-\frac{1{,}70}{10{,}0}}\right]$$

soit $\boxed{T(z) = 32{,}9\ ^\circ\mathrm{C}}$.
Compte tenu de l'approximant effectuée, on peut écrire $j_S = -j_\mathrm{m} + \mathcal{P}_0 H \mathrm{e}^{-L_\mathrm{c}/H}$. On calcule

$$j_S = -35{,}0 \times 10^{-3} - 2{,}50 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^3$$

soit $\boxed{j_S = -6{,}00 \times 10^{-2}\ \mathrm{W \cdot m^{-2}}}$.

3 — Prise en compte du relief

15. En l'absence de sources internes, l'équation de la chaleur en régime stationnaire s'écrit $\Delta T = 0$, soit

$$\boxed{\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0}. \qquad (3)$$

En cherchant la solution sous la forme $T(x,z) = f(x)g(z) + T_\mathrm{s}$, l'équation (3) s'écrit

$$f''(x)g(z) + f(x)g''(z) = 0$$

soit

$$\frac{g''(z)}{g(z)} = -\frac{f''(x)}{f(x)}.$$

Le premier terme étant indépendant de x et le second indépendant de z, ces deux termes sont égaux à une constante K. On obtient alors les deux équations différentielles

$$g''(z) - K g(z) = 0 \quad \text{et} \quad f''(x) + K f(x) = 0.$$

On veut que $T(x, z = 0)$ soit une fonction sinusoïdale de x ; la fonction sera sinusoïdale si $K > 0$. En notant $K = k^2$, on a

$$f''(x) + k^2 f(x) = 0$$

dont la solution générale est

$$f(x) = \alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx).$$

L'équation

$$g''(z) - k^2 g(z) = 0$$

admet pour solution générale

$$g(z) = a\mathrm{e}^{-kz} + b\mathrm{e}^{kz}.$$

La température devant rester finie pour $z \to +\infty$, on doit avoir $b = 0$, d'où

$$T(x,z) = T_\mathrm{s} + [\alpha \cos(kx) + \beta \sin(kx)] b \mathrm{e}^{-kz}.$$

En identifiant en $z = 0$:

$$T_\mathrm{s} + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) = T_\mathrm{s} + \alpha b \cos(kx) + \beta b \sin(kx).$$

On en déduit $\beta = 0$, $\alpha b = T_1$ et $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, d'où

$$\boxed{T(x,z) = T_\mathrm{s} + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right)}.$$

16. On a vu qu'en l'absence de sources thermiques, pour une surface place $z = 0$, l'équation de la chaleur s'écrit

$$\Delta T = 0. \qquad (4)$$

Cette équation homogène admet pour solution compatible avec les conditions aux limites

$$T_\mathrm{h}(x,z) = T_\mathrm{s} + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right).$$

En présence de sources thermiques dégageant une puissance volume $\mathcal{P}(z)$, le bilan d'énergie en régime stationnaire s'écrit

$$-\operatorname{div} \vec{j}_Q + \mathcal{P}(z) = 0$$

soit, comme $\vec{j}_Q = -\kappa \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, T$,

$$\kappa \Delta T + \mathcal{P}(z) = 0.$$

La température vérifie donc

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = -\frac{\mathcal{P}_0}{\kappa} \mathrm{e}^{-z/H}. \qquad (5)$$

On a vu à la question **14**, avec les approximations proposées, que la solution

$$T(x,z) = \theta_0 + \frac{j_\mathrm{m}}{\kappa} z + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa}\left[1 - \mathrm{e}^{-z/H}\right]$$

vérifie la condition $T(x,0) = \theta_0$. On peut donc considérer la solution

$$T_\mathrm{p}(x,z) = \frac{j_\mathrm{m}}{\kappa} z + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa}\left[1 - \mathrm{e}^{-z/H}\right],$$

solution de l'équation (5) et vérifiant la condition aux limites $T_\mathrm{p}(x,z) = 0$.
Considérons maintenant la solution

$$T(x,z) = T_\mathrm{h}(x,z) + T_\mathrm{p}(x,z).$$

L'équation de la chaleur étant linéaire, on déduit des équations (4) et (5)

$$\Delta T = \Delta T_\mathrm{h} + \Delta T_\mathrm{p} = -\frac{\mathcal{P}_0}{\kappa} \mathrm{e}^{-z/H}.$$

De plus cette solution vérifie la condition aux limites

$$T(x,0) = T_\mathrm{h}(x,0) + T_\mathrm{p}(x,0) = T_\mathrm{s} + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right).$$

La solution cherchée est donc de la forme

$$\boxed{T(x,z) = T_\mathrm{s} + T_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \exp\left(-\frac{2\pi z}{\lambda}\right) + \frac{j_\mathrm{m}}{\kappa} z + \frac{\mathcal{P}_0 H^2}{\kappa}\left[1 - \mathrm{e}^{-z/H}\right]}$$