

DS n° 3

Sujet de préparation n° 3 — solution

Étude d'une ailette de refroidissement

1 — Préliminaire

1. La loi de Fourier s'écrit

$$\vec{j}_Q = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T.$$

2. Considérons une tranche comprise entre les abscisses x et $x + dx$. Pendant dt , son énergie interne δU varie de

$$\begin{aligned} d(\delta U) &= \rho c S dx [T(x, t + dt) - T(x, t)] \\ &= \rho S dx \frac{\partial T}{\partial t} dt. \end{aligned}$$

Le transfert thermique reçu s'écrit

$$\begin{aligned} \delta^2 Q_{\text{reçu}} &= [j_Q(x, t) - j_Q(x + dx, t)] S dt \\ &= -\frac{\partial j_Q}{\partial x} S dx dt = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S dx dt. \end{aligned}$$

En l'absence de terme de production d'énergie, le bilan s'écrit $d(\delta U) = \delta^2 Q_{\text{reçu}}$, d'où après simplification

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

3. En régime stationnaire, l'équation se la chaleur se ramène à

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0.$$

4. L'intégration de l'équation précédente conduit à $T(x) = A + Bx$. Compte tenu des conditions aux limites $T(0) = T_1$ et $T(L) = T_2$, on en déduit

$$T(x) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{L} x.$$

5. La résistance thermique R_{th} de la paroi est définie par la relation

$$T_1 - T_2 = R_{\text{th}} \Phi.$$

Le flux thermique est donné par

$$\Phi = j_Q S = -\lambda \frac{dT}{dx} S = \frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2).$$

On en déduit

$$R_{\text{th}} = \frac{L}{\lambda S}.$$

6.a) Le coefficient h dépend principalement de la nature du fluide, et de l'écoulement du fluide (vitesse).

Le flux Φ a la dimension d'une puissance, soit $[\Phi] = \text{ML}^2\text{T}^{-3}$, on en déduit $[h] = \text{MT}^{-3}\Theta^{-1}$.

Le coefficient h s'exprime donc dans le système international en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}$.

En termes d'unités dérivées, h s'exprime en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$.

6.b) La loi de Newton peut s'écrire $T_2 - T_e = R_c \Phi$, avec

$$R_c = \frac{1}{hS}.$$

6.c) Les résistances thermique R_{th} et R_c sont **associées en série** : les deux milieux sont traversés par le même flux thermique.

6.d) Écrivons la continuité du flux thermique à l'interface paroi-fluide :

$$\frac{\lambda S}{L} (T_1 - T_2) = h(T_2 - T_e) S$$

d'où $\frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_e} = \frac{hL}{\lambda}$. On a donc

$$\frac{T_1 - T_2}{T_2 - T_e} = \text{Bi} \quad \text{avec} \quad \text{Bi} = \frac{hL}{\lambda}.$$

6.e) Si $\text{Bi} \ll 1$, on a $T_1 - T_2 \ll T_2 - T_e$: la chute de température dans la paroi est très faible devant la discontinuité de température entre la paroi et le fluide.

On peut donc considérer la température comme uniforme dans le solide.

Plus λ est élevé, plus le nombre de Biot est faible ; le cas $\text{Bi} \ll 1$ correspond donc à un matériau **bon conducteur thermique**.

Remarque : le nombre de Biot peut s'écrire

$$\text{Bi} = \frac{L}{\lambda S} = \frac{R_{\text{th}}}{R_c}.$$

Il s'exprime comme le rapport de la résistance thermique interne au matériau sur la résistance thermique externe (pour le flux thermique vers l'extérieur). Un nombre de Biot faible est caractéristique d'un milieu offrant une faible résistance thermique interne : la chute de température peut alors être considérée comme nulle entre deux points d'une même section du matériau.

2 — Ailette de refroidissement

7. Exemples de refroidissement : processeur dans un ordinateur, moteur dans une voiture.

8. On réalise une convection forcée à l'aide d'un ventilateur quand le fluide est l'air, d'un circuit d'eau dont la circulation est assurée par une pompe lorsque le fluide est l'eau.

9. Comme $[A] = L^2$ et $[P] = L$, on a $[D_t] = L$: **la dimension caractéristique d'une ailette est homogène à une longueur.**

10. L'approximation de l'ailette est valable si $Bi < 0,1$, c'est-à-dire si $hD_t < 0,1\lambda$.

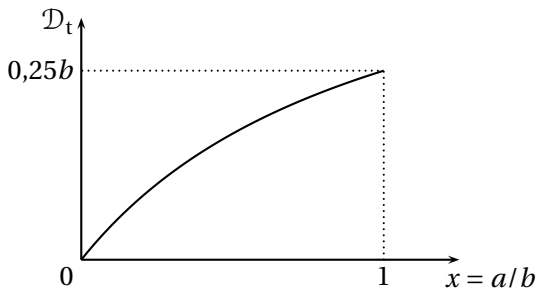
► La dimension à prendre en compte serait de l'ordre du rayon a dans le cas de l'ailette circulaire, et de b dans le cas de l'ailette rectangulaire. La dimension caractéristique D_t est un ordre de grandeur de ces dimensions.

11. Dans le cas d'une ailette circulaire, ses caractéristiques sont $A = \pi a^2$ et $P = 2\pi a$, d'où $D_t = a/2$.

12. Pour l'ailette rectangulaire, on a $A = ab$ et $P = 2(a+b)$, d'où $D_t = \frac{ab}{2(a+b)}$.

En posant $x = a/b$, on peut écrire

$$D_t = \frac{bx}{2(1+x)}.$$



13. Considérons une tranche de l'ailette comprise entre les abscisses x et $x + dx$. Pendant dt , il entre l'énergie $j(x)A dt$ à travers la face en x , il sort l'énergie $j(x + dx)A dt$ à travers la face en $x + dx$ et il sort l'énergie $h[T(x) - T_e]P dx dt$ à travers la face latérale de surface $P dx$.

L'énergie de cette tranche étant constante en régime permanent, le bilan s'écrit donc

$$j(x)A dt - j(x + dx)A dt - h[T(x) - T_e]P dx, dt = 0,$$

d'où

$$-\frac{dj}{dx}A dx dt - h[T(x) - T_e]P dx, dt = 0.$$

En tenant compte de la loi de Fourier, on obtient

$$\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} A - h[T(x) - T_e]P = 0,$$

soit

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hP}{\lambda A} [T(x) - T_e] = 0.$$

La température dans l'ailette vérifie donc

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - m^2 [T(x) - T_e] = 0 \quad \text{avec} \quad m = \sqrt{\frac{h}{\lambda D_t}} \quad (1)$$

La dimension de m se déduit directement de l'équation différentielle (1) : $[m] = L^{-1}$. Le module de l'ailette a la dimension de l'inverse d'une longueur.

3 — Cas de l'ailette infinie

14. La solution générale de l'équation (1) est de la forme

$$T(x) = T_e + \alpha e^{mx} + \beta e^{-mx},$$

où α et β sont deux constantes.

La température devant rester finie à la limite $x \rightarrow +\infty$, on a nécessairement $\alpha = 0$. La condition à la limite s'écrit alors $T(0) = T_0 = T_e + \beta$, d'où $\beta = T_0 - T_e$, et

$$T(x) = T_e + (T_0 - T_e) e^{-mx}.$$

15. En $x = 0$, on a

$$j_Q(0) = -\lambda \left(\frac{dT}{dx} \right)_{x=0} = \lambda m (T_0 - T_e).$$

Le flux thermique $\Phi_a = j_Q(0)A$ s'écrit alors

$$\Phi_a = \lambda m A (T_0 - T_e).$$

16. Soit Φ_t le flux total sortant de la surface de l'ailette en contact avec le fluide; l'ailette reçoit le flux Φ_a à travers sa section en contact avec la paroi. L'énergie interne de l'ailette étant constante en régime permanent, le bilan d'énergie pour la totalité de l'ailette s'écrit $0 = (-\Phi_t + \Phi_a) dt = 0$, d'où $\Phi_t = \Phi_a$: le flux Φ_a reçu par l'ailette à sa base représente le flux thermique total évacué de l'ailette vers le fluide.

17. En l'absence d'ailette, le flux évacué par la surface A vaut

$$\Phi_0 = h(T_0 - T_e)A.$$

Le gain de l'ailette vaut donc $\eta_\infty = \frac{\lambda m A (T_0 - T_e)}{h(T_0 - T_e)A}$, soit

$$\eta_\infty = \frac{\lambda m}{h}.$$

Comme $m = \sqrt{\frac{h}{\lambda D_t}}$, on peut écrire

$$\eta_\infty = \sqrt{\frac{\lambda}{h D_t}}.$$

18. Nous avons vu à la question 9.d. que la dimension caractéristique D_t est d'autant plus petite que l'ailette est fine. Comme l'efficacité η_∞ est une fonction décroissante de D_t : **une ailette fine a une meilleure efficacité qu'une ailette épaisse.**

4 — Cas de l'ailette finie avec extrémité isolée

1 Efficacité de l'ailette

19. Comme $\Phi(x=L) = j_Q(x=L)\mathcal{A} = 0$, la loi de Fourier permet d'écrire

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=L} = 0. \quad (2)$$

20. La solution générale de l'équation (1) est de la forme

$$T(x) = T_e + \alpha e^{mx} + \beta e^{-mx}.$$

La condition en $x=0$ s'écrit

$$T_0 = T_e + \alpha + \beta.$$

On a

$$\frac{dT}{dx} = \alpha m e^{mx} - \beta m e^{-mx}.$$

La condition (2) s'écrit donc

$$0 = \alpha e^{mL} - \beta e^{-mL}.$$

Il faut donc résoudre le système

$$\begin{cases} \alpha e^{mL} - \beta e^{-mL} = 0 \\ \alpha + \beta = T_0 - T_e. \end{cases}$$

En multipliant la seconde équation par e^{-mL} , on a $\alpha e^{-mL} + \beta e^{-mL} = (T_0 - T_e)e^{-mL}$. Additionnons à la première équation :

$$\alpha(e^{mL} + e^{-mL}) = (T_0 - T_e)e^{-mL},$$

d'où

$$\alpha = \frac{(T_0 - T_e)e^{-mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}.$$

Comme $\beta = \alpha e^{2mL}$, on a

$$\beta = \frac{(T_0 - T_e)e^{mL}}{e^{mL} + e^{-mL}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} T(x) &= T_e + \frac{(T_0 - T_e)e^{-mL}e^{mx} + (T_0 - T_e)e^{mL}e^{-mx}}{e^{mL} + e^{-mL}} \\ &= T_e + (T_0 - T_e) \frac{e^{m(L-x)} + e^{-m(L-x)}}{e^{mL} + e^{-mL}} \end{aligned}$$

soit

$$T(x) = T_e + (T_0 - T_e) \frac{\cosh[m(L-x)]}{\cosh(mL)}.$$

21. On a

$$\frac{dT}{dx} = (T_0 - T_e)(-m) \frac{\sinh[m(L-x)]}{\cosh(mL)},$$

soit à la base de l'ailette

$$\left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0} = -m(T_0 - T_e) \frac{\sinh(mL)}{\cosh(mL)}.$$

Le flux est donnée par $\Phi_f = j_{th}(x=0)\mathcal{A}$, avec

$$j_{th}(x=0) = -\lambda \left(\frac{dT}{dx}\right)_{x=0},$$

d'où

$$\Phi_f = \lambda m \mathcal{A} (T_0 - T_e) \tanh(mL).$$

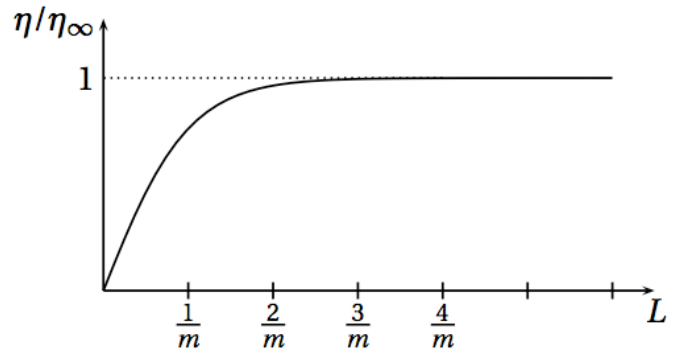
22. Comme $\Phi_0 = h(T_0 - T_e)\mathcal{A}$, on en déduit l'expression de l'efficacité de l'ailette :

$$\eta = \frac{\lambda m}{h} \tanh(mL).$$

20.a) L'efficacité de l'ailette infinie étant donnée par $\eta_\infty = \frac{\lambda m}{h}$, on en déduit

$$\eta = \eta_\infty \tanh(mL).$$

20.b) Influence de la longueur de l'ailette sur son efficacité :



On voit qu'à partir d'une certaine longueur, augmenter L n'a plus d'influence sur l'efficacité de l'ailette; par exemple, $\eta(L=2/m) = 0,96\eta_\infty$ et $\eta(L=3/m) = 0,995\eta_\infty$. À partir de $L=3/m$, on peut considérer l'ailette comme infinie; il est inutile de la prendre plus longue.

2 Application numérique

21. La dimension caractéristique de l'ailette vaut

$$\mathcal{D}_t = \frac{ab}{2(a+b)} = \frac{2 \times 10^{-3} \times 80 \times 10^{-3}}{2 \times (2e-3 + 80e-3)}$$

soit $\mathcal{D}_t = 9,76 \times 10^{-4} \text{ m}$.

Le nombre de Biot vaut $\text{Bi} = 9,6 \times 10^{-5}$.

On a $\text{Bi} \ll 0,1$: l'hypothèse d'une température uniforme dans la section de l'ailette est largement justifiée.

22. Dans le cas d'une modélisation par une ailette de longueur infinie, l'efficacité vaut $\eta_\infty = 102$.

23. La température à l'extrémité de l'ailette est donnée par

$$T(L) = T_e + (T_0 - T_e) \frac{1}{\cosh(mL)}.$$

On calcule $m = \sqrt{\frac{h}{\lambda \mathcal{D}_t}} = 10,0 \text{ m}^{-1}$ et $mL = 0,251$. On calcule alors $T(L) = 310,8 \text{ }^\circ\text{C}$.

L'efficacité vaut $\eta = \eta_\infty \tanh(mL)$, soit $\eta = 25,1$.

24. La température $T(L)$ à l'extrémité de l'ailette est encore nettement supérieure à la température ambiante T_e : **il n'est donc pas raisonnable de modéliser cette ailette par une ailette infinie**. On a d'ailleurs ici $mL = 0,25$, ce qui nous situe dans le domaine où la longueur a encore une influence importante sur l'efficacité (voir graphe de la question 20.b).