

Étude du contact thermique

1 Réponse d'un milieu semi-infini à un choc thermique

On considère un milieu semi-infini ($x > 0$), de masse volumique ρ et de chaleur massique c , initialement à la température T_0 . On y étudie la diffusion thermique dans le cas unidimensionnel : $T(x, t)$.

À l'instant $t = 0$, on impose la température $T(0, 0) = T_e$ à la paroi $x = 0$.

La condition initiale (juste avant le choc thermique) s'écrit $T(x, 0) = T_0$.

La réponse du système est étudiée *après un intervalle de temps court* (cette condition est discutée en fin de problème); la partie du milieu très loin de la frontière n'étant pas affecté après un temps court, les conditions aux limites s'écrivent $T(0, t) = T_e$ et $T(\infty, t) = T_0$.

On note λ la conductivité thermique du matériau, ρ sa masse volumique et c sa chaleur massique.

1. Établir l'équation de la diffusion thermique. On introduira la diffusivité thermique $a = \lambda/(\rho c)$ du matériau.
2. On cherche une solution de l'équation de la chaleur sous la forme $T(x, t) = T(u)$, où l'on a posé

$$u = \frac{x}{2\sqrt{at}}.$$

2.a) Quelle est la dimension de u (justifier la réponse)?

2.b) On pose

$$T^*(u) = \frac{T(u) - T_e}{T_0 - T_e}.$$

Quelle est la dimension de cette grandeur?

Avec la fonction $T^*(u)$, comment s'écrivent :

- la condition initiale $T(x, 0) = T_0$?
- la condition à la frontière $T(0, t) = T_e$?
- la condition à la limite $T(\infty, t) = T_0$?

3. Montrer que l'on a

$$\frac{d^2 T^*}{du^2} + 2u \frac{dT^*}{du} = 0.$$

4. En déduire¹ l'expression de $\frac{dT^*}{du}$ à une constante multiplicative près que l'on notera A .

5. On donne $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

On définit la fonction erreur :

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-v^2} dv,$$

avec $\operatorname{erf}(\infty) = 1$ et $\operatorname{erf}(0) = 0$.

Déterminer complètement $T^*(u)$ en fonction de $\operatorname{erf}(u)$.

6. En déduire l'expression de $T(x, t)$ sous la forme d'une intégrale.

7. Montrer que le vecteur densité de courant thermique s'écrit

$$j_{\text{th}}(x, t) = -(T_0 - T_e) \frac{b}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right),$$

où b est un coefficient appelé *effusivité* du matériau, que l'on exprimera en fonction de λ , ρ et c .

8. Quelle est la profondeur ℓ caractéristique de la diffusion thermique à l'instant t ?

Le milieu n'est pas semi-infini, mais de profondeur L . L'étude menée précédemment décrit la réponse du système pour un « intervalle de temps court ».

Donner une condition sur t pour que le modèle du milieu semi-infini reste valable.

Quelle hypothèse n'est plus valable après un temps plus long?

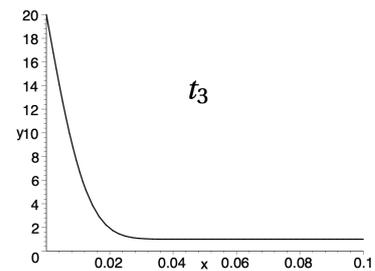
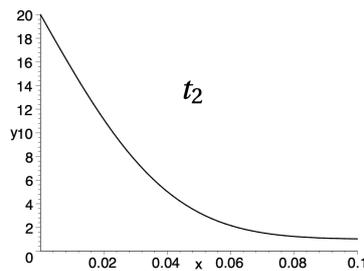
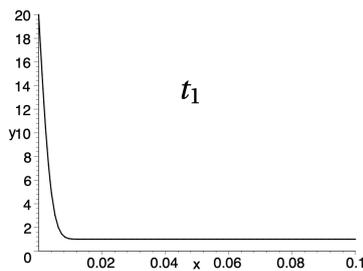
1. On pourra poser $f(u) = \frac{dT^*}{du}$.

9. On considère un mur de brique de 10 cm d'épaisseur.

Pour la brique à température ambiante, les données sont $\lambda = 0,69 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $\rho = 1600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et $c = 840 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$.

Le mur est initialement à la température $T_0 = 1 \text{ }^\circ\text{C}$, et on applique en $t = 0$ à la face $x = 0$ la température $T_e = 20 \text{ }^\circ\text{C}$.

On représente $T(x, t)$ en fonction de x à différents instants.



9.a) Classer les dates t_1 , t_2 et t_3 par ordre croissant (justifier la réponse).

9.b) La durée la plus grande parmi les graphes précédents est de 1000 s. La condition établie à la question 8 sur t est-elle vérifiée? Le modèle du milieu semi-infini est-il valide?

2 Mise en contact thermique de deux corps

On considère deux corps semi-infinis, notés 1 et 2, initialement aux températures respectives T_{01} et T_{02} , mis brusquement en contact thermiques à l'instant $t = 0$.

On ne s'intéresse à l'évolution du système qu'aussitôt après la mise en contact; on est alors en droit de considérer les milieux comme semi-infinis, comme on l'a montré dans la première partie.

Chaque corps est caractérisé par sa conductivité thermique λ_i , sa masse volumique ρ_i , sa chaleur massique c_i , sa diffusivité thermique a_i et son effusivité $b_i = \sqrt{\lambda_i \rho_i c_i}$.

Le milieu 1 correspond à $x < 0$ et le milieu 2 à $x > 0$, la surface de contact étant le plan $x = 0$.

1. Par analogie avec la première partie, écrire sans les établir les deux équations aux dérivées partielles vérifiées par $T_1(x, t)$ et $T_2(x, t)$.

2. 2.a) Que peut-on dire de $T_1(0, t)$ et de $T_2(0, t)$?

2.b) Que peut-on dire du flux thermique en $x = 0$? Justifiez votre réponse brièvement.

En déduire une relation entre $\frac{\partial T_1}{\partial x}(0, t)$ et $\frac{\partial T_2}{\partial x}(0, t)$.

2.c) D'après les conditions initiales, déterminer $T_1(-\infty, t)$, $T_1(x, 0)$ pour $x < 0$, $T_2(+\infty, t)$ et $T_2(x, 0)$ pour $x > 0$.

3. Comme lors de l'étude précédente, on pose

$$u_1 = \frac{x}{2\sqrt{a_1 t}} \quad \text{et} \quad u_2 = \frac{x}{2\sqrt{a_2 t}},$$

et²

$$T_1^*(u) = \frac{T_1 - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} \quad \text{et} \quad T_2^*(u) = \frac{T_2 - T_{02}}{T_{01} - T_{02}}.$$

3.a) Montrer que l'on a

$$\frac{d^2 T_1^*}{du_1^2} + 2u_1 \frac{dT_1^*}{du_1} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2 T_2^*}{du_2^2} + 2u_2 \frac{dT_2^*}{du_2} = 0.$$

3.b) Comment s'écrivent les conditions initiales et aux limites?

3.c) Montrer que l'on a

$$b_1 \frac{dT_1^*}{du_1}(0) + b_2 \frac{dT_2^*}{du_2}(0) = 0.$$

3.d) Montrer que l'on a

$$T_1^*(0) + T_2^*(0) = 1.$$

3.e) L'intégration des équations établies à la question 3.a conduit à

$$\frac{dT_1^*}{du_1} = A_1 e^{-u_1^2} \quad \text{et} \quad \frac{dT_2^*}{du_2} = A_2 e^{-u_2^2},$$

où A_1 et A_2 sont deux constantes.

En déduire une relation entre b_1 , b_2 , A_1 et A_2 .

2. Ces variables sont choisies de façon à garder la symétrie du problème.

3.f) On définit la fonction erreur complémentaire :

$$\operatorname{erfc}(u) = 1 - \operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} e^{-v^2} dv.$$

Exprimer $T_1^*(u_1)$ et $T_2^*(u_2)$ respectivement en fonction de $\operatorname{erfc}(u_1)$ et $\operatorname{erfc}(u_2)$.

3.g) Montrer que $A_1 - A_2 = 2/\sqrt{\pi}$.

3.h) Montrer finalement que

$$\frac{T_1(x, t) - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} = \frac{b_2}{b_1 + b_2} \operatorname{erfc}\left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}}\right)$$

et

$$\frac{T_2(x, t) - T_{02}}{T_{01} - T_{02}} = \frac{b_1}{b_1 + b_2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right).$$

3.i) En déduire la température du point de contact en $x = 0$ en fonction des températures initiales des deux corps T_{01} et T_{02} , et des effusivités b_1 et b_2 .

3.j) Que peut-on dire de la température du point de contact si $b_1 \gg b_2$?

L'effusivité de la peau est $b_p \approx 1600$ SI, celle du bois $b_b \approx 11$ SI et celle de l'acier $b_a \approx 13000$ SI. Expliquer la différence de sensation si on touche ($T_{\text{peau}} = 37^\circ\text{C}$) un morceau de bois ou un morceau d'acier à la même température de 60°C , peu après le contact.

Que se passe-t-il si l'on garde le contact plus longtemps ?

Ce problème a été écrit à partir de l'ouvrage *Transferts thermique, introduction aux sciences des transferts*, de Jean Taine et Jean-Pierre Petit (éditions Dunod).