DS n° 3 — Sujet de préparation n° 4 — solution

Étude du contact thermique

1 Réponse d'un milieu semi-infini à un choc thermique

1. On considère la tranche comprise entre les sections x et $x+\mathrm{d}x$. Le bilan d'énergie pendant $\mathrm{d}t$ s'écrit

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t}\,\mathrm{d}t S\,\mathrm{d}x = -\Phi(x,t)\,\mathrm{d}t + \Phi(x+\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}t$$
$$= -\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} S\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = a\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{a = \frac{\lambda}{\rho c}}.$$

2. 2.a) De l'équation de la diffusion thermique on déduit immédiatement l'équation aux dimensions :

$$T^{-1} = [a]L^{-2}.$$

On a donc $[a] = L^2T^{-1}$. On en déduit $\boxed{[u]=1}$: **la grandeur u est sans dimension.**

2.b) On a $\boxed{[T^*]=1}$; cette grandeur est sans dimension.

— Le couple $(x, t=0)$ correspond à $u \to \infty$; la condition initiale $T(x,0) = T_0$ s'écrit alors $T^*(\infty) = 1$.
— Le couple $(x=0, t)$ correspond à $u = 0$. La condition à la frontière $T(0,t) = T_\mathrm{e}$ s'écrit donc $T^*(0) = 0$.
— Le couple $(x \to \infty, 0)$ correspond à $u \to \infty$; la condition $T(\infty, 0) = T_0$ s'écrit alors $T^*(\infty) = 1$.

Les trois conditions proposées se ramènent alors à deux conditions sur $T^*(u)$:

$$\boxed{T^*(0) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{T^*(\infty) = 1}.$$

3. On a

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u}\frac{x}{2\sqrt{a}}\left(-\frac{1}{2t\sqrt{t}}\right) = -\frac{u}{2t}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u}.$$

D'après la définition de T^*, on a

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u} = (T_0 - T_\mathrm{e})\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}u},$$

d'où

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -(T_0 - T_\mathrm{e})\frac{u}{2t}\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}u}.$$

On a

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{at}}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}u},$$

et de même

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{4at}\frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}u^2} = \frac{T_0 - T_\mathrm{e}}{4at}\frac{\mathrm{d}^2 T^*}{\mathrm{d}u^2}.$$

L'équation de la chaleur s'écrit alors après simplification

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 T^*}{\mathrm{d}u^2} + 2u\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}u} = 0}.$$

4. Posons $f(u) = \dfrac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}u}$. L'équation différentielle précédente s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} + 2uf = 0,$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}f}{f} = -2u\,\mathrm{d}u.$$

Cette équation différentielle s'intègre en

$$f(u) = A\mathrm{e}^{-u^2},$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}T^*(u)}{\mathrm{d}u} = A\mathrm{e}^{-u^2}}.$$

5. On a donc $\mathrm{d}T^* = A\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u$. Compte tenu des conditions aux limites, on a

$$\int_0^1 \mathrm{d}T^* = A\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u,$$

soit

$$1 = A\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

On a donc $A = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}$, et

$$\mathrm{d}T^* = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u,$$

d'où

$$\int_0^{T^*(u)} \mathrm{d}T^* = T^*(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u \mathrm{e}^{-u'^2}\,\mathrm{d}u',$$

D'après la définition de la fonction erreur, on a donc

$$\boxed{T^*(u) = \mathrm{erf}(u)}.$$

6. On a donc

$$\frac{T(x,t) - T_\mathrm{e}}{T_0 - T_\mathrm{e}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u,$$

d'où

$$\boxed{T(x,t) = T_\mathrm{e} + (T_0 - T_\mathrm{e})\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u}.$$

7. Le vecteur densité de courant thermique est donné par la loi de Fourier

$$j_{\mathrm{th}} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Comme

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{T_0 - T_{\mathrm{e}}}{2\sqrt{at}} \frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}u},$$

et

$$\frac{\mathrm{d}T^*}{\mathrm{d}u} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-u^2},$$

on a

$$\begin{aligned} j_{\mathrm{th}} &= -(T_0 - T_{\mathrm{e}}) \frac{\lambda}{2\sqrt{at}} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathrm{e}^{-u^2} \\ &= -(T_0 - T_{\mathrm{e}}) \sqrt{\frac{\lambda \rho c}{\pi t}} \mathrm{e}^{-u^2} \end{aligned}$$

en utilisant la définition de a.

Le vecteur densité de courant thermique s'écrit donc

$$\boxed{j_{\mathrm{th}}(x,t) = -(T_0 - T_{\mathrm{e}}) \frac{b}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4at}\right)},$$

avec $\boxed{b = \sqrt{\lambda \rho c}}$, effusivité du matériau.

8. Le flux thermique décroît exponentiellement avec une longueur caractéristique à l'instant t : $\boxed{\ell = \sqrt{at}}$.

Si le milieu est de profondeur L, le modèle précédent sera valable tant que $\ell \ll L$, soit $\boxed{t \ll L^2/a}$.

Après un temps plus long, on ne peut plus écrire la condition aux limites $T(\infty, t) = T_0$.

9. 9.a) L'élévation de température se propage dans le milieu au cours du temps. On a donc $\boxed{t_1 < t_3 < t_2}$.

9.b) Avec les données numériques, on calcule $L^2/a \approx 20\,000$ s.

Avec $t_2 = 1000$ s, on peut dire que $t_2 \ll L^2/a$.

La condition établie à la question 8 sur t est bien vérifiée, et le modèle du milieu semi-infini est valide.

2 Mise en contact thermique de deux corps

1. Les températures vérifient les équations aux dérivées partielles

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} &= a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \quad \text{pour } x < 0 \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} &= a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \quad \text{pour } x > 0, \end{aligned}}$$

avec

$$\boxed{a_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_1 c_1}} \quad \text{et} \quad \boxed{a_2 = \frac{\lambda_2}{\rho_2 c_2}}.$$

2. 2.a) La température étant continue, on a au point de contact $x = 0$: $\boxed{T_1(0,t) = T_2(0,t)}$.

2.b) Il ne peut y avoir accumulation d'énergie dans une tranche infiniment mince centrée en $x = 0$. On a donc **continuité du flux thermique en x = 0**.

Compte tenu de la loi de Fourier, la relation $j\mathrm{th}(x = 0^-, t) = j_{\mathrm{th}}(0^+, t)$ s'écrit

$$\boxed{\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}(0,t) = \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x}(0,t)}.$$

2.c) Les conditions initiales s'écrivent :

$$\boxed{T_1(x,0) = T_{01}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_2(x,0) = T_{02}}.$$

Dans le cas de milieux semi-infinis, on a

$$\boxed{T_1(-\infty, t) = T_{01}} \quad \text{et} \quad \boxed{T_2(\infty, t) = T_{02}}.$$

3. 3.a) Les calculs sont similaires à ceux de la question 1.3 ; on a

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 T_1^*}{\mathrm{d}u_1^2} + 2u_1 \frac{\mathrm{d}T_1^*}{\mathrm{d}u_1} = 0 \quad \text{pour } u_1 < 0}$$

et

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 T_2^*}{\mathrm{d}u_2^2} + 2u_2 \frac{\mathrm{d}T_2^*}{\mathrm{d}u_2} = 0 \quad \text{pour } u_2 > 0.}$$

3.b) Comme les cas $x \to -\infty$ et $t \to 0$ reviennent à $u_1 \to -\infty$, les conditions initiale et aux limites dans le milieu 1 se résument à $\boxed{T_1^*(-\infty) = 0}$.

De même dans le milieu 2, on a $\boxed{T_2^*(+\infty) = 0}$.

3.c) On a

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{a_1 t}} \frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}u_1} = \frac{T_{02} - T_{01}}{2\sqrt{a_1 t}} \frac{\mathrm{d}T_1^*}{\mathrm{d}u_1}$$

et

$$\frac{\partial T_2}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{a_2 t}} \frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}u_2} = \frac{T_{01} - T_{02}}{2\sqrt{a_2 t}} \frac{\mathrm{d}T_2^*}{\mathrm{d}u_2}.$$

La condition de continuité (en x_0, soit $u_{1,2} = 0$) du flux thermique établie en 2.2.b s'écrit donc

$$-\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}} \frac{\mathrm{d}T_1^*}{\mathrm{d}u_1}(0) = \frac{\lambda_2}{\sqrt{a_2}} \frac{\mathrm{d}T_2^*}{\mathrm{d}u_2}(0).$$

On a $\frac{\lambda_1}{\sqrt{a_1}} = \frac{\lambda_1 \sqrt{\rho_1 c_1}}{\sqrt{\lambda_1}} = \sqrt{\lambda_1 \rho_1 c_1} = b_1$ (de même dans le milieu 2), d'où

$$\boxed{b_1 \frac{\mathrm{d}T_1^*}{\mathrm{d}u_1}(0) + b_2 \frac{\mathrm{d}T_2^*}{\mathrm{d}u_2}(0) = 0}.$$

3.d) Soit $T_0 = T_1(0,t) = T_2(0,t)$ la température commune au point de contact (condition de continuité). On a alors

$$T_1^*(0) = \frac{T_0 - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} \quad \text{et} \quad T_2^*(0) = \frac{T_0 - T_{02}}{T_{01} - T_{02}}.$$

On en déduit $\boxed{T_1^*(0) + T_2^*(0) = 1}$.

3.e) La relation de continuité du flux établie en 3.c s'écrit

$$\boxed{b_1 A_1 + b_2 A_2 = 0}\,.$$

3.f) On a

$$\int_{T_2^*(u_2)}^{0} \mathrm{d}T_2^* = A_2 \int_{u_2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u_2^2}\,\mathrm{d}u_2$$

soit

$$T_2^*(u_2) = -A_2 \int_{u_2}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u_2'^2}\,\mathrm{d}u_2'$$

d'où

$$\boxed{T_2^*(u_2) = -\frac{\sqrt{\pi}}{2} A_2\,\mathrm{erfc}(u_2)}\,.$$

De même

$$\begin{aligned}\int_0^{T_1^*(u_1)} \mathrm{d}T_1^* &= A_1 \int_{-\infty}^{u_1} \mathrm{e}^{-u_1'^2}\,\mathrm{d}u_1' \\ &= -A_1 \int_{+\infty}^{-u_1} \mathrm{e}^{-u_1'^2}\,\mathrm{d}u_1' = A_1 \int_{-u_1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u_1'^2}\,\mathrm{d}u_1'\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{T_1^*(u_1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} A_1\,\mathrm{erfc}(-u_1)}\,.$$

3.g) Comme $\mathrm{erfc}(0) = 1$, la relation du 2.3.e s'écrit

$$-\frac{\sqrt{\pi}}{2} A_2 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} A_1 = 1\,,$$

soit

$$\boxed{A_1 - A_2 = \frac{2}{\sqrt{\pi}}}\,.$$

3.h) On a donc le système

$$\begin{cases} A_1 - A_2 = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \\ b_1 A_1 + b_2 A_2 = 0 \end{cases}$$

dont la solution est

$$A_1 = \frac{2b_2}{(b_1+b_2)\sqrt{\pi}} \quad \text{et} \quad A_2 = -\frac{2b_1}{(b_1+b_2)\sqrt{\pi}}\,.$$

On en déduit

$$T_1^*(u_1) = \frac{b_2}{b_1+b_2}\,\mathrm{erfc}(-u_1)$$

et

$$T_2^*(u_2) = \frac{b_1}{b_1+b_2}\,\mathrm{erfc}(u_2)\,,$$

soit

$$\boxed{\frac{T_1(x,t) - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} = \frac{b_2}{b_1+b_2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{-x}{2\sqrt{a_1 t}}\right)} \quad \text{pour } x \leqslant 0$$

et

$$\boxed{\frac{T_2(x,t) - T_{01}}{T_{01} - T_{02}} = \frac{b_1}{b_1+b_2}\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{a_2 t}}\right)} \quad \text{pour } x \geqslant 0$$

3.i) Comme $\mathrm{erfc}(0) = 1$, on a

$$\frac{T_1(0,t) - T_{01}}{T_{02} - T_{01}} = \frac{b_2}{b_1+b_2} \quad \text{et} \quad \frac{T_2(x,t) - T_{01}}{T_{01} - T_{02}} = \frac{b_1}{b_1+b_2}\,.$$

La température de contact vaut

$$T_\mathrm{c}(t) = T_1(0,t) = T_2(0,t)\,,$$

soit

$$\boxed{T_\mathrm{c}(t) = \frac{b_1 T_{01} + b_2 T_{02}}{b_1 + b_2}}\,.$$

La température de contact, qui s'établit immédiatement après celui-ci, prend une valeur intermédiaire (moyenne pondérée par les effusivités des milieux) entre celles des températures T_{10} et T_{02} des deux corps en contact.

3.j) Si $b_1 \gg b_2$, on a $T_\mathrm{c} \approx T_{01}$: le corps de plus grande effusivité tend à imposer sa température à l'autre.

corps 1	corps 2	température de contact
peau à 37 °C	bois à 60 °C	37,2 °C
peau à 37 °C	acier à 60 °C	57,5 °C

La sensation n'est pas du tout la même !

D'après le modèle utilisé, la température de contact se maintient indéfiniment dans le temps. En fait, ce modèle reste valable tant que l'on peut considérer le milieu comme semi-infini, c'est-à-dire « aux temps courts » tels que $a_1 t/L_1^2 \ll 1$ et $a_2 t/L_2^2 \ll 1$. Si le contact entre la peau et un morceau bois dure longtemps, on finit par se brûler !