

## DS n° 3

## Partie I — Le manchot empereur (CCINP PC 2021)

## Données

Opérateur gradient d'un champ scalaire  $U$  :

coordonnées cartésiennes	coordonnées cylindriques	coordonnées sphériques
$\vec{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$	$\vec{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial \rho} \vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$	$\vec{\text{grad}}U = \frac{\partial U}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \vec{u}_\varphi$

Constante de Stefan :  $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

Le manchot empereur *Aptenodytes forsteri* est la plus grande espèce de manchots, avec en moyenne une taille de 1,2 m et une masse corporelle de 30 kg. Ce manchot est capable d'affronter sur de longues durées les conditions climatiques extrêmes de l'Antarctique, caractérisées par des températures moyennes de  $-40^\circ\text{C}$  lors des longues nuits polaires du mois de juin et des températures ressenties atteignant les  $-200^\circ\text{C}$  lorsque le blizzard souffle au plus fort. Le secret de cette exceptionnelle capacité d'isolation thermique réside dans toute une série d'adaptations, en particulier physiologiques et comportementales.

Du point de vue des échanges thermiques, on modélise un manchot par un cylindre d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ , de rayon  $R = 10 \text{ cm}$ , de longueur  $\ell = 1,2 \text{ m}$ , recouvert successivement :

- d'une couche de graisse d'épaisseur  $e_g = 2,0 \text{ cm}$  et de conductivité thermique  $\lambda_g = 0,20 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;
- d'une couche de filaments duveteux enfermant une épaisseur  $e_a = 1,0 \text{ cm}$  d'air de conductivité thermique  $\lambda_a = 0,026 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;
- d'une couche très dense de plumes courtes et raides, disposées en diagonale et imbriquées les unes dans les autres pour former un véritable « coupe-vent » imperméable à l'eau, d'épaisseur  $e_p = 2,0 \text{ cm}$  et de conductivité thermique  $\lambda_p = 0,035 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

En régime stationnaire, le métabolisme de l'animal fournit une puissance  $\mathcal{P}_m$  permettant de maintenir sa température interne  $T_i$  constante.

## 1 Généralités

On considère deux cylindres de même axe  $(O, \vec{u}_z)$ , de longueur  $\ell$  et de rayon  $R_1$  et  $R_2$ , de surfaces latérales isothermes portées aux températures respectives  $T_1$  et  $T_2 < T_1$  (figure I-1).

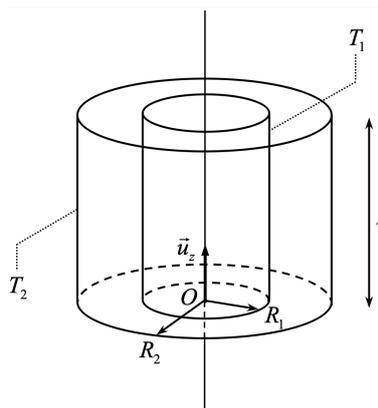


FIGURE I-1 – Conducteur thermique à symétrie cylindrique

Le milieu séparant ces deux surfaces, homogène, isotrope, de conductivité thermique  $\lambda$ , est le siège d'un phénomène de transfert thermique uniquement radial en négligeant tout effet de bord. On suppose le régime stationnaire atteint. En tout point  $M$  du milieu, repéré par ses coordonnées cylindriques dans le repère  $(O; \vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , la température y est donc fonction uniquement de la distance  $\rho$  à l'axe  $(O, \vec{u}_z)$  :  $T(M) = T(\rho)$ .

1. Le vecteur associé au flux thermique  $\Phi_m$  est le vecteur densité de courant thermique  $\vec{j}_{th}$ .  
Que représente physiquement la norme de ce vecteur ? Préciser son unité.

2. Justifier que  $\vec{j}_{th} = -\lambda \frac{dT}{d\rho} \vec{u}_\rho$ . Justifier physiquement le signe moins.
3. Effectuer en régime stationnaire un bilan thermique, entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , pour la portion du milieu comprise entre les cylindres d'axe  $(O, \vec{u}_z)$ , de longueur  $\ell$ , de rayons  $\rho$  et  $\rho + d\rho$  ( $R_1 < \rho < R_2$ ). En déduire que l'expression du champ de température  $T(\rho)$  en tout point  $M$  du milieu est

$$T(\rho) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(R_1/R_2)} \ln(\rho/R_1) + T_1.$$

4. Définir la résistance thermique  $R_{th}$  du milieu. Montrer qu'elle s'écrit  $R_{th} = \frac{1}{2\pi\lambda\ell} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ .

## 2 Détermination du métabolisme du manchot

5. Retrouver l'ordre de grandeur de la valeur adoptée du rayon  $R$  du cylindre modélisant un manchot supposé uniquement constitué d'eau.

6. En régime stationnaire, justifier que le flux thermique  $\Phi_{th}$  dégagé par un manchot est égal à la puissance  $\mathcal{P}_m$  due à son métabolisme.

7. Comment sont associées les résistances thermiques de chacune des couches recouvrant un manchot? Justifier. À partir du résultat de la question 4, donner l'expression de la résistance thermique  $R_{th,1}$  équivalente à cette association en fonction notamment des conductivités thermiques et des épaisseurs des différentes couches. Calculer la valeur de  $R_{th,1}$ .

8. Les transferts thermiques entre la face extérieure du plumage du manchot à la température  $T_p$  et l'air extérieur à la température  $T_e$  sont modélisés par une densité de courant thermique conducto-convectif  $\vec{j}_{th,cc} = h(T_p - T_e)\vec{u}_\rho$ , où  $h$  est le coefficient de transfert conducto-convectif. En se limitant à la surface latérale du cylindre d'aire  $S$  modélisant le manchot, exprimer en fonction de  $h$  et  $S$  la résistance thermique  $R_{th,cc}$  associée à ce transfert.

9. En considérant que le manchot et l'atmosphère rayonnent comme des corps noirs de températures respectives  $T_p$  et  $T_e$  très proches, on admet que le flux radiatif surfacique  $\varphi_r$  émis par le manchot s'écrit  $\varphi_r \approx 4\sigma T_e^3(T_p - T_e)$ , où  $\sigma$  est la constante de Stefan.

Exprimer, en fonction de  $\sigma$ ,  $T_e$  et  $S$ , la résistance thermique  $R_r$  associée à ce transfert si on se limite ici aussi à la surface latérale du cylindre modélisant le manchot.

10. Comment sont associées les résistances thermiques correspondant aux transferts conducto-convectifs et radiatifs? Justifier. Donner l'expression de la résistance thermique  $R_{th,2}$  équivalente à cette association en fonction de  $\sigma$ ,  $T_e$ ,  $h$  et  $S$ . Calculer la valeur de  $R_{th,2}$  lorsque le manchot se trouve dans un environnement à la température  $T_e = -17^\circ\text{C}$  en présence d'un vent de vitesse  $V = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . On admettra que le coefficient de transfert conducto-convectif s'écrit  $h = 5,7 + 3,5V$ , où  $V$  est exprimée en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $h$  en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

11. Donner l'expression en la justifiant de la résistance thermique totale  $R_{th,tot}$  du manchot en fonction de  $R_{th,1}$  et  $R_{th,2}$ . En déduire la valeur de la puissance  $\mathcal{P}_m$  due au métabolisme nécessaire à un manchot pour maintenir une température interne  $T_i = 37,7^\circ\text{C}$  dans un environnement à la température  $T_e = -17^\circ\text{C}$  et en présence d'un vent de vitesse  $V = 5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Vérifier que la puissance  $\mathcal{P}_m$  est de l'ordre de 50 W.

En plus de ses exceptionnelles capacités d'isolation thermique, le manchot empereur a développé une ultime stratégie pour réduire ses déperditions de chaleur : la thermorégulation sociale consistant à s'assembler en très grands groupes compacts de plusieurs centaines d'individus.

Des travaux de recherche menés en 2007 par l'équipe française de Caroline Gilbert ont évalué expérimentalement les bénéfices de ce comportement. Ils ont pour cela mesuré la puissance  $\mathcal{P}_m$  due au métabolisme sur trois groupes de manchots, à partir de leur perte de poids en fonction du temps. Les premiers étaient seuls, isolés dans des enclos. Les seconds étaient parqués dans des enclos par petits groupes de 5 à 10 individus. Les troisièmes étaient libres de se déplacer et pouvaient s'assembler en très grands groupes. Les trois populations étaient soumises aux mêmes conditions d'environnement : température extérieure moyenne de  $-17^\circ\text{C}$  et un vent moyen de  $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le tableau suivant rassemble leurs observations :

Groupe étudié	isolé	petits groupes	grands groupes
$\mathcal{P}_m$ (W)	85	52	43

12. À la lumière des résultats de l'équipe de recherche de Caroline Gilbert, discuter la modélisation effectuée dans cette partie. Expliquer brièvement pourquoi les grands rassemblements de manchots réduisent la puissance due à leur métabolisme.

## Partie II — Autour d'une centrale nucléaire (Centrale PSI 2024)

*Un formulaire et certaines données numériques sont disponibles en fin d'énoncé.*

Une centrale nucléaire utilise l'énergie dégagée par la fission nucléaire des atomes d'uranium placés au cœur du réacteur. La chaleur générée par la fission est transférée à un fluide caloporteur, généralement de l'eau qui circule dans le circuit primaire. L'eau du circuit primaire est portée à très haute température par l'effet des réactions de fission nucléaire qui ont lieu au sein du cœur du réacteur. Elle passe ensuite dans un pressuriseur qui maintient sa pression constante et égale à  $p = 155$  bar, puis effectue un échange thermique avec le circuit secondaire dans un générateur de vapeur : l'énergie thermique dégagée par l'eau du premier circuit vaporise alors l'eau du second, qui fait ensuite tourner plusieurs turbines génératrices d'énergie mécanique, elle-même enfin transformée en énergie électrique par un alternateur.

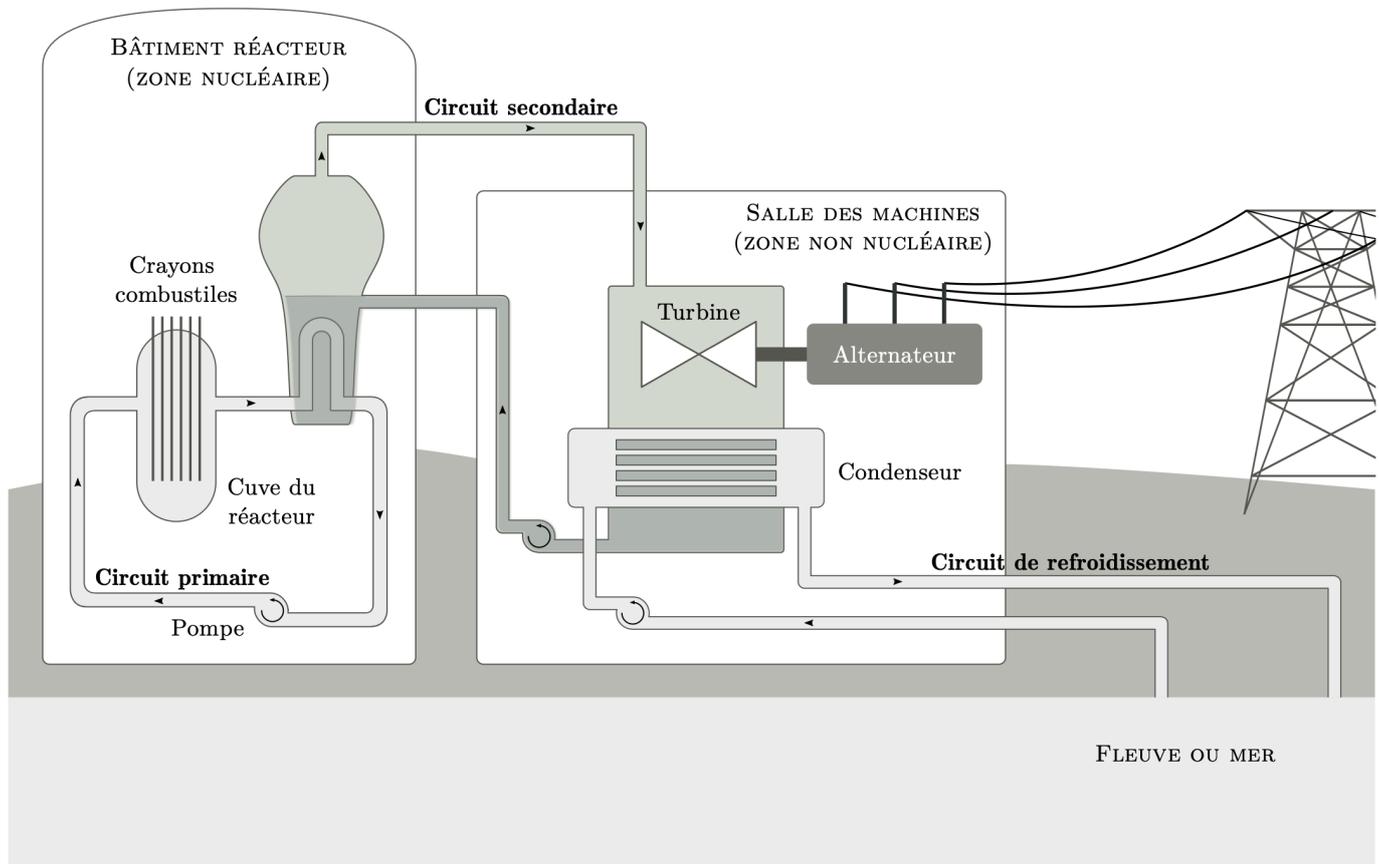


FIGURE II-1 – Principe d'un réacteur nucléaire. Librement adapté d'une illustration EDF

On se propose d'étudier le circuit primaire.

Le cœur est constitué de  $N = 41\,448$  crayons combustibles. Chaque crayon combustible est constitué d'un cylindre de hauteur  $H = 3,66$  m et de diamètre  $d = 2R_4 = 9,5$  mm. Ces crayons sont le siège de réactions de fission, exothermiques.

La puissance thermique développée dans le cœur vaut  $P_1 = 2776$  MW.

Le circuit primaire doit être correctement dimensionné pour prévenir tout échauffement anormal du combustible,  $\text{UO}_2(\text{s})$ , dont la température de fusion vaut  $2800$  °C.

La conductivité thermique de  $\text{UO}_2(\text{s})$  vaut  $\lambda_2 = 3,5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

La pression de vapeur saturante de l'eau à  $345$  °C vaut  $155$  bar.

Dans ce problème, on se place en régime stationnaire et on néglige les variations d'énergie mécanique.

### Évolution de la température entre le cœur du combustible et le fluide caloporteur

On étudie l'évolution de la température entre le centre du combustible  $\text{UO}_2(\text{s})$  et l'eau du circuit primaire, qui circule dans l'espace annulaire de rayon allant de  $R_4$  à  $R_5$  et entourant les crayons. On suppose que la température du fluide caloporteur est une constante et vaut  $T_5 = 303$  °C.

On note  $T_2$  et  $T_3$  les températures de part et d'autre de l'interface entre le combustible et la gaine. On note  $T_4$  et  $T_5$  les températures de part et d'autre de l'interface entre la gaine et le fluide caloporteur.

Pour simplifier, on néglige les effets de bord à chaque extrémité des cylindres ; on considère pour l'étude que les  $N$

crayons combustibles de hauteur  $H$  sont disposés les uns au-dessus des autres et que les échanges thermiques se font exclusivement selon une direction radiale.

Les échanges thermiques au niveau d'une interface sont modélisés selon la relation de Newton : la puissance thermique traversant une surface  $dS$  de cette interface s'écrit  $h dS(T_s - T_a)$  où  $h$  désigne le coefficient de transfert conducto-convectif et  $T_s$  et  $T_a$  désignent les températures de part et d'autre de l'interface.

Le coefficient de transfert conducto-convectif entre le combustible et la gaine vaut  $h_2 = 10 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . Le coefficient de transfert conducto-convectif entre la gaine et le fluide caloporteur vaut  $h_4 = 25 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

Chaque crayon est entouré d'une gaine d'épaisseur  $e = R_4 - R_3 = 0,60 \text{ mm}$  dont la conductivité thermique vaut  $\lambda_3 = 16 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

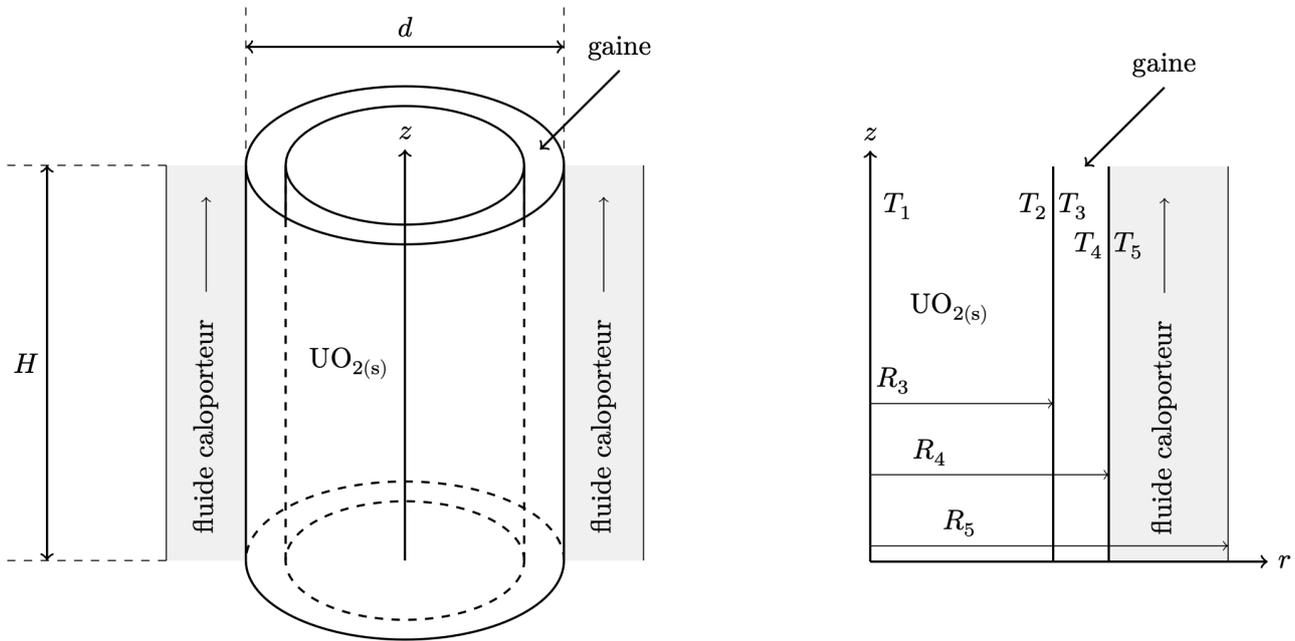


FIGURE II-2

1. Exprimer la surface latérale, notée  $S_{\text{tot}}$ , de l'ensemble des  $N$  crayons combustibles entourés de la gaine en fonction de  $N$ ,  $d$  et  $H$ .

On note  $P_V$  la puissance thermique par unité de volume engendrée par les réactions de fission au cœur des crayons combustibles et que l'on suppose uniforme. On appelle  $r$  la distance à l'axe du cylindre modélisant l'ensemble des  $N$  crayons.

2. Montrer que l'équation de la diffusion thermique vérifiée par la température dans le combustible s'écrit

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) + Ar = 0.$$

Exprimer  $A$  en fonction de  $P_V$  et  $\lambda_2$ .

3. Exprimer la température  $T(r)$  dans  $\text{UO}_2(\text{s})$  en fonction de  $P_V$ ,  $T_2$ ,  $R_3$ ,  $\lambda_2$  et  $r$ .

4. Exprimer la température  $T_3$  en fonction de  $T_2$ ,  $P_1$ ,  $h_2$ ,  $d$ ,  $e$ ,  $H$  et  $N$ .

5. Exprimer la température  $T(r)$  en un point de la gaine en fonction de  $T_4$ ,  $P_1$ ,  $R_4$ ,  $\lambda_3$ ,  $S_{\text{tot}}$  et  $r$ .

6. Calculer les température  $T_4$ ,  $T_3$ ,  $T_2$  et  $T_1$ .

7. Représenter le profil de température  $T(r)$  pour  $0 \leq r \leq R_5$ .

8. Expliquer pourquoi le bon fonctionnement du pressuriseur du circuit primaire fait partie des critères majeurs de sûreté. Proposer une solution pour pouvoir évacuer une puissance plus importante.

## Formulaire et données

Opérateur gradient en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z.$$

### Partie III — Prospection électrique des sols (Centrale MP 2018)

La prospection électrique est l'une des plus anciennes méthodes de prospection géophysique. Elle repose sur l'interprétation de la résistance électrique du terrain. Ces mesures doivent être réalisées *in situ*, cette mesure ne pouvant être réalisée en laboratoire sur un échantillon sorti de son environnement. Elles sont particulièrement adaptées à l'étude des faibles profondeurs.

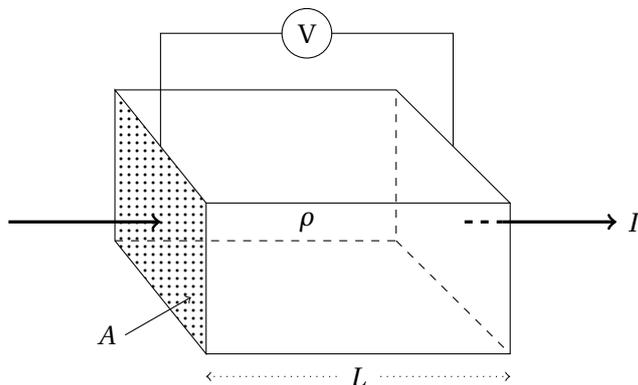


FIGURE III-1

1. Établir l'expression de la résistance électrique d'un parallélépipède homogène de longueur  $L$ , de section  $A$  et de résistivité  $\rho = 1/\sigma$ , où  $\sigma$  est la conductivité électrique du matériau (figure III-1).

Pour déterminer la résistance électrique d'un terrain on impose la circulation d'un courant continu d'intensité  $I$  à la surface du sol qui se répartit en profondeur. Cette opération est réalisée grâce à des électrodes que l'on plante dans le sol aux points  $A$  et  $B$  (figure III-2). La tension est mesurée à l'aide d'un voltmètre entre les points  $M$  et  $N$ .

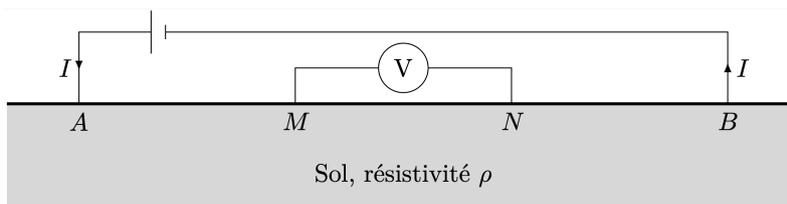


FIGURE III-2

2. Dans la pratique on utilise un courant alternatif très basse fréquence. Pour quelle raison?

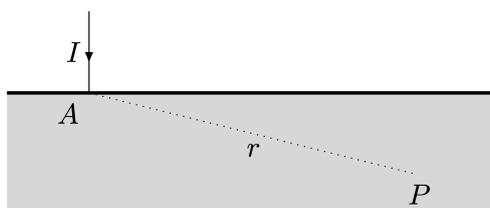


FIGURE III-3

3. Considérons seulement l'électrode placée en  $A$  (figure III-3). On note  $\vec{j}(r)$  le vecteur densité volumique de courant au point  $P$ . La terre est considérée comme homogène. Quelle est la forme des lignes de courant dans la terre? Donner l'expression de  $\vec{j}(r)$  en fonction notamment de l'intensité du courant  $I$  et de  $r$ .

4. Exprimer le champ électrique  $\vec{E}(r)$  et le potentiel électrique  $V_A(r)$  au point  $P$  en fonction de  $I$ ,  $r$  et  $\rho$ . On suppose que la valeur du potentiel est nulle à grande distance.

5. Dans le cas des deux électrodes (figure III-4), exprimer le potentiel électrique  $V$  au point  $P$  en fonction de  $\rho$ ,  $r_A$ ,  $r_B$  et  $I$ . On suppose que la valeur du potentiel est nulle à grande distance. Quelle relation définit les équipotentielles?

1. On rappelle le principe de superposition : le potentiel créé par deux électrodes est la somme des potentiels créés par chaque électrode seule.

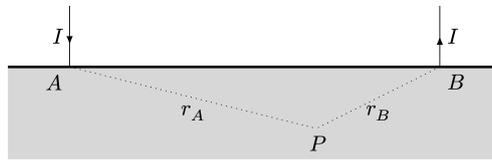


FIGURE III-4

6. Exprimer la différence de potentiel  $\Delta V = V_M - V_N$  lue sur le voltmètre (figure III-2). Montrer que la résistivité s'écrit  $\rho = \frac{2\pi\Delta V}{If}$  où  $f$  est le facteur géométrique à exprimer en fonction des distances  $MA$ ,  $MB$ ,  $NA$  et  $NB$ .
7. Dans le cas de la configuration dite de Wenner (figure III-5), les points  $A$ ,  $M$ ,  $N$  et  $B$  sont équidistants espacés de la longueur  $\ell$ . Exprimer le facteur géométrique  $f$ .



FIGURE III-5

8. Les courbes de la figure III-6 présentent le résultat de la simulation des équipotentielles tracées pour deux électrodes distantes de 10 m situées en  $\pm 5,0$  m plantées dans un terrain de résistivité  $\rho = 100 \Omega \cdot \text{m}$ . L'intensité du courant est  $I = 0,50$  A.
- Que vaut le facteur géométrique correspondant dans la configuration de Wenner? Cette valeur est-elle en accord avec la simulation de la figure III-6?

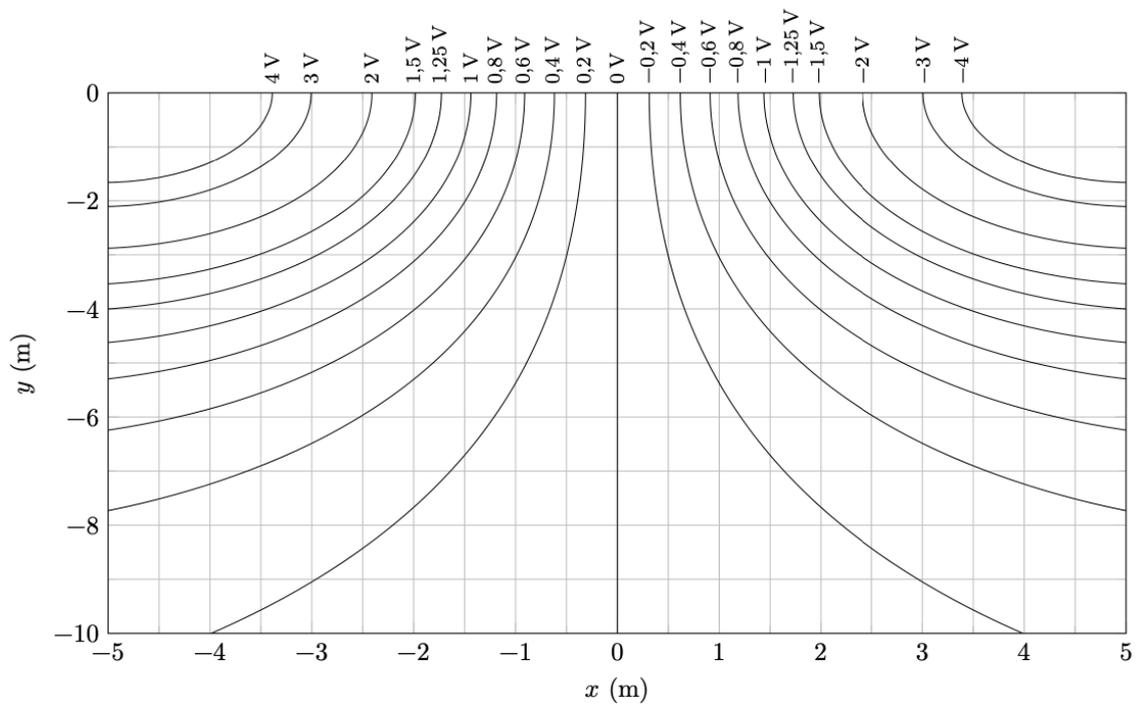
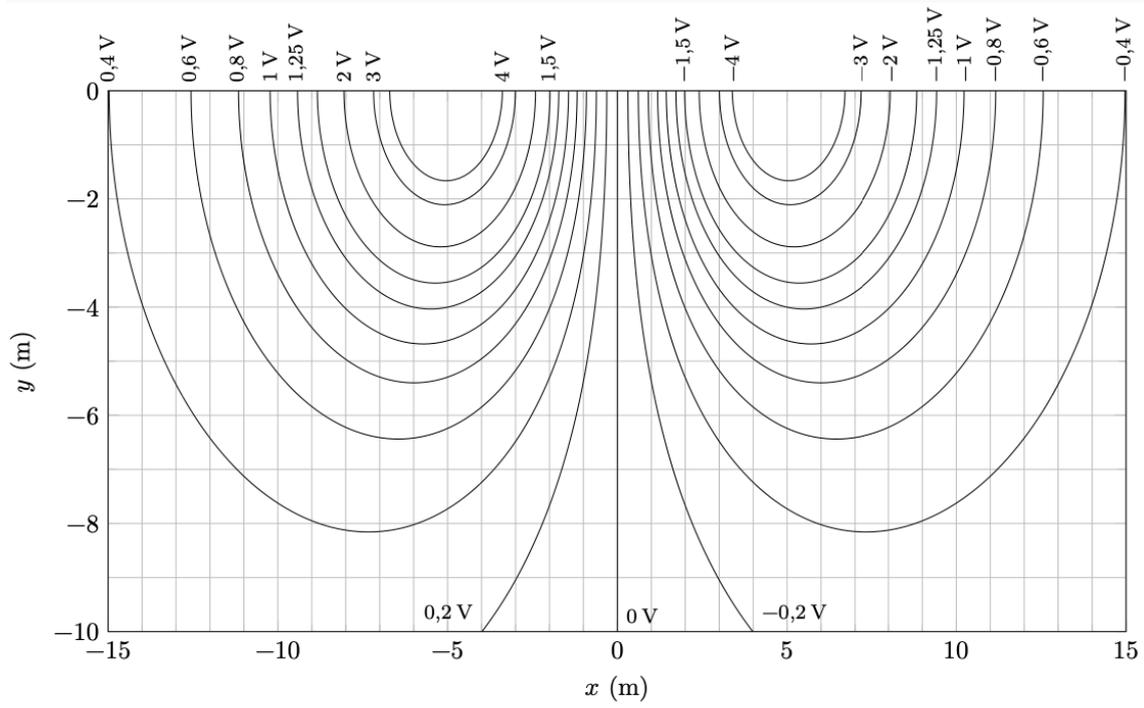
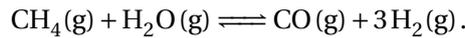


FIGURE III-6

## Partie IV — Synthèse du dihydrogène (d'après BCPST)

Un mode de préparation industrielle du dihydrogène met en jeu la réaction en phase gazeuse



La réaction se déroule sous une pression totale constante  $P_{\text{tot}} = 10 \text{ bar}$ .

On donne à 298 K :

Espèce	$\text{CH}_4(\text{g})$	$\text{H}_2\text{O}(\text{g})$	$\text{CO}(\text{g})$	$\text{H}_2(\text{g})$
$S_m^\circ (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$	186,27	188,82	197,99	130,64
$\Delta_f H^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	-74,88	-241,94	-110,59	

On donne  $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

1. Calculer  $\Delta_r H^\circ$  pour la réaction considérée. Que peut-on conclure quant à la réaction?
2. Calculer  $\Delta_r S^\circ$  pour la réaction considérée. Le signe était-il prévisible?
3. On suppose  $\Delta_r H^\circ$  et  $\Delta_r S^\circ$  indépendants de la température.

Calculer la constante d'équilibre à  $T = 1072 \text{ K}$ .

On retiendra pour la suite la valeur de  $K^\circ$  avec deux chiffres significatifs.

4. Exprimer la constante d'équilibre en fonction des pressions partielles à l'équilibre des constituants et de la pression standard  $P^\circ = 1 \text{ bar}$ .
5. Exprimer le quotient de réaction  $Q_r$  en fonction de la quantité de matière de chacun des constituants, de la pression totale  $P_{\text{tot}}$  et de  $P^\circ$ .

Initialement, le système contient 10 moles de méthane, 30 moles d'eau, 5 moles de monoxyde de carbone et 15 moles de dihydrogène.

6. Calculer le quotient de réaction  $Q_r$ .
7. Le système est-il en équilibre thermodynamique?

Si le système n'est pas en équilibre, dans quel sens se produira l'évolution?

On justifiera les réponses.

On considère un nouvel état initial dans lequel le système ne contient que 10 moles de méthane et 10 moles d'eau.

8. Déterminer la composition du système à l'équilibre, en partant de ce nouvel état initial. La pression totale reste égale à 10 bar.
9. Quelle est l'influence d'une élévation isobare de la température sur cet état d'équilibre? Une brève justification est demandée.
10. Quelle est l'influence d'une élévation isotherme de la pression sur cet état d'équilibre? Une brève justification est demandée.
11. Au système dans l'état d'équilibre précédemment obtenu on ajoute, de façon isotherme et isobare, une mole de  $\text{H}_2\text{O}$ . Dans quel sens se produira l'évolution? Justifier la réponse.
12. Au système dans l'état d'équilibre précédemment obtenu on ajoute, de façon isotherme et isobare, une mole de  $\text{CO}$ . Dans quel sens se produira l'évolution? Justifier la réponse.