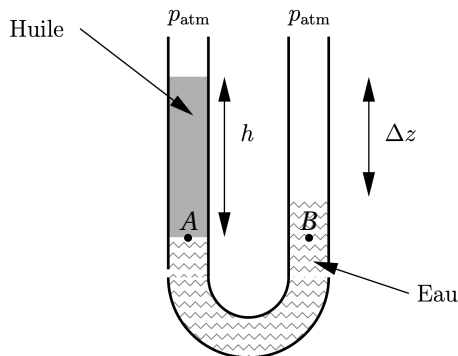


TD phénomènes de transport

Statique des fluides

2 — Mesure de la densité d'une huile

On considère les points A et B à la même côte z :



Comme $z_A = z_B$, on a $P_A = P_B$.

La relation de la statique des fluides donne

$$P_A = P_{\text{atm}} + \rho_h g h \quad \text{et} \quad P_B = P_{\text{atm}} + \rho_e g (h - \Delta z)$$

en notant ρ_e la masse volumique de l'eau et ρ_h celle de l'huile.

De $P_A = P_B$ on déduit

$$\rho_h g h = \rho_e g (h - \Delta z).$$

La densité d de l'huile étant définie par $\rho_h = d\rho_e$, on a

$$d h = h - \Delta z,$$

d'où

$$d = 1 - \frac{\Delta z}{h}.$$

Le volume d'huile est $V = h s$, d'où

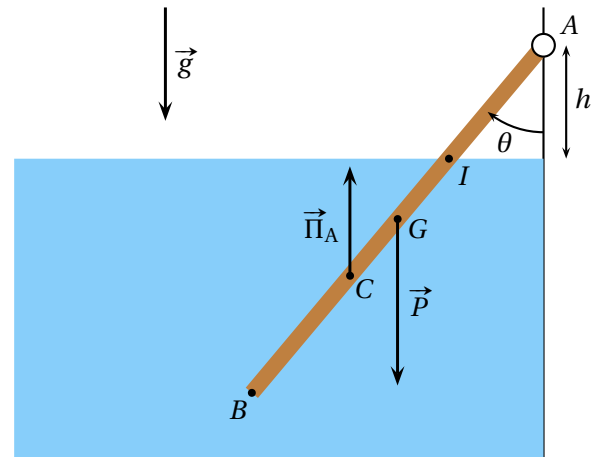
$$h = \frac{V}{s} = \frac{10}{1} = 10 \text{ cm.}$$

On en déduit $d = 1 - 1,510$ soit $d = 0,85$.

3 — Flottaison d'une barre en bois

1. La tige est soumise à

- l'action du support en A , dont le moment en A est nul (liaison pivot parfaite, non représentée sur le schéma);
- son poids \vec{P} qui s'applique au barycentre G de la tige;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A$ qui s'applique au barycentre C de la partie immergée de la tige.



La tige étant homogène, G est au milieu de AB et C est au milieu de IB .

L'équilibre de la tige est réalisé comme la somme des moments en A des actions est nulle, soit en projection selon l'axe de rotation :

$$0 = P \times AG \sin \theta - \Pi_A \times AC \sin \theta \\ = (P \times AG - \Pi_A \times AC) \sin \theta. \quad (1)$$

L'équation (1) admet la solution $\theta = 0$: la tige est verticale.

La solution $\theta \neq 0$ est alors donnée par

$$0 = P \times AG - \Pi_A \times AC$$

Il faut déterminer AG et AC .

On a $AG = L/2$.

On a

$$AI = \frac{h}{\cos \theta}$$

d'où

$$BI = L - AI = L - \frac{h}{\cos \theta}.$$

On a donc

$$BC = \frac{BI}{2} = \frac{L}{2} - \frac{h}{2 \cos \theta}$$

et

$$AC = L - BC = \frac{L}{2} + \frac{h}{2 \cos \theta}.$$

Notons ρ_e la masse volumique de l'eau. Celle de la tige est $\rho_t = d\rho_e$.

En notant V le volume de la tige, sa masse vaut

$$m = \rho_t V = d\rho_e V.$$

La tige étant de section constante, son volume immergé est donné par

$$V_{\text{im}} = \frac{IB}{AB} V = \left(1 - \frac{h}{L \cos \theta}\right) V.$$

La masse du fluide de remplacement vaut donc

$$m_f = \rho_e V_{\text{im}} = \rho_e V \left(1 - \frac{h}{L \cos \theta}\right).$$

On en déduit

$$P = mg = d\rho_e Vg$$

et

$$\Pi_A = m_t g = \rho_e V \left(1 - \frac{h}{L \cos \theta}\right) g.$$

La condition d'équilibre $AG \times P = AC \times \Pi_A$ s'écrit alors

$$\frac{L}{2} d\rho_e Vg = \left(\frac{L}{2} + \frac{h}{2 \cos \theta}\right) \rho_e V \left(1 - \frac{h}{L \cos \theta}\right) g$$

soit

$$d = \left(1 + \frac{h}{L \cos \theta}\right) \left(1 - \frac{h}{L \cos \theta}\right) = 1 - \frac{h^2}{L^2 \cos^2 \theta}.$$

On en déduit

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1-d}} \frac{h}{L}.$$

2. On a une solution $\theta \neq 0$ si l'équation (2) a une solution. Comme $\cos \theta \leq 1$, il faut

$$\frac{1}{\sqrt{1-d}} \frac{h}{L} \leq 1$$

soit

$$\frac{h}{L} \leq \sqrt{1-d}.$$

3. On calcule

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1-0,65}} \frac{1}{3} = 0,5634$$

d'où $\theta = 55,7^\circ$.

1. Prenons l'axe Oz ascendant d'origine O (axe de rotation du trop-plein).

La relation de la statique des fluides s'écrit

$$\frac{dP}{dz} = -\mu g$$

où μ est la masse volumique de l'eau.

Avec $P(H) = P_0$, on obtient

$$P(z) = P_0 + \mu g(H - z).$$

La pression de l'eau au niveau de la partie OB vaut

$$P(0) = P_0 + \mu gH.$$

La pression de l'air sur l'autre face valant P_0 , la résultante des forces de pression sur la paroi du fond du trop-plein vaut

$$\vec{F} = (P(0) - P_0)L\ell \vec{e}_z = \mu gHL\ell \vec{e}_z,$$

en notant ℓ sa largeur selon Oy .

La pression étant uniforme sur cette paroi, la force de pression s'applique au milieu de OB ; son moment par rapport à Oy vaut alors

$$\mathcal{M}'_{Oy} = -\frac{L}{2} \mu gHL\ell.$$

La pression n'étant pas uniforme sur la paroi OA' , on va considérer la résultante sur un section comprise entre z et $z+dz$, de surface $dS = \ell dz$. La résultante des forces de pression (eau d'un côté et air de l'autre) s'y exerçant vaut

$$d\vec{F} = (P(z) - P_0)\ell dz \vec{e}_x = \mu g(H - z)\ell dz \vec{e}_x$$

et son moment par rapport à Oy vaut

$$d\mathcal{M}''_{Oy} = z\mu g(H - z)\ell dz.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}''_{Oy} &= \mu g\ell \int_0^H (H - z)z dz = \mu g\ell \int_0^H (Hz - z^2) dz \\ &= \mu g\ell \frac{H^3}{6}. \end{aligned}$$

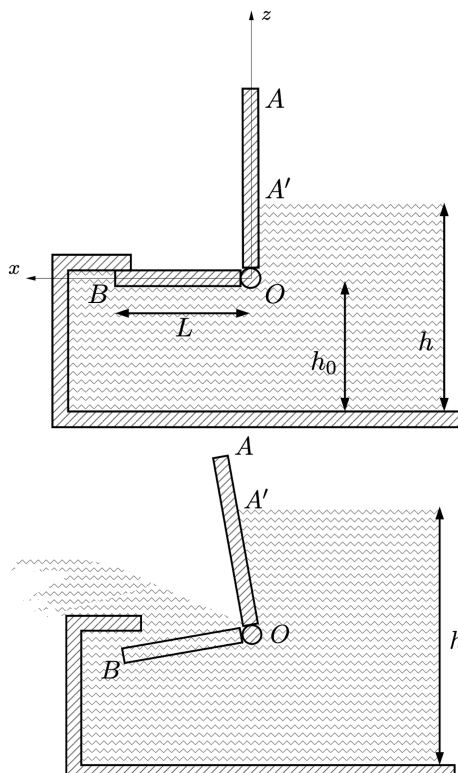
Le moment en O des forces de pression exercées par l'eau et l'air sur la porte vaut $\mathcal{M}_{Oy} = \mathcal{M}'_{Oy} + \mathcal{M}''_{Oy}$ soit

$$\mathcal{M}_{Oy} = \frac{\mu gH\ell}{2} \left(\frac{H^2}{3} - L^2\right).$$

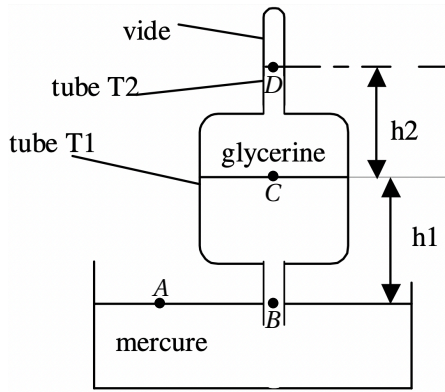
2. La porte bascule si $\mathcal{M}_{Oy} > 0$, soit si $H > \sqrt{3}L$; la hauteur de liquide vérifie alors

$$h > h_0 + \sqrt{3}L.$$

5 — Trop plein



6 — Baromètre différentiel à deux liquides d'où



1. La loi de de l'hydrostatique dans la glycérine donne

$$P(C) = P(D) + \rho_2 g h_2 = \rho_2 g h_2$$

comme $P(D) = 0$.

La loi de de l'hydrostatique dans le mercure donne

$$P(B) = P(C) + \rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1.$$

Les points A et B étant à la même altitude z , on a $P(B) = P(A) = P^\circ$, d'où

$$\rho_2 g h_2 + \rho_1 g h_1 = P^\circ.$$

La pression atmosphérique est P° , et les dénivellation des deux liquides sont h_1 et h_2 . Établir la relation entre P° , h_1 et h_2 à l'équilibre.

2. Notons $z > 0$ l'élévation de la surface libre de la glycérine, $z' > 0$ celle de l'interface entre le mercure et la glycérine et $z'' > 0$ la baisse de niveau de la surface libre de mercure dans la cuve.

Les altitudes considérées précédemment deviennent alors

$$h'_1 = h_1 + z' + z'' \quad \text{et} \quad h'_2 = h_2 + z - z'.$$

La conservation du volume de glycérine permet d'écrire

$$S_1 z' = S_2 z$$

soit

$$z' = \frac{S_2}{S_1} z.$$

La conservation du volume de mercure permet d'écrire

$$S_1 z' = S_0 z''$$

soit

$$z'' = \frac{S_1}{S_0} z' = \frac{S_1 S_2}{S_0 S_1} z.$$

Avec la pression $P^\circ + \Delta P$, le résultat de la question 1 donne

$$P^\circ + \Delta P = g(\rho_1 h'_1 + \rho_2 h'_2) = g(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) + g[\rho_1(z' + z'') + \rho_2(z - z')]$$

$$\Delta P = g z \left[\rho_1 \left(\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_1 S_2}{S_0 S_1} \right) + \rho_2 \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right) \right].$$

➤ C'est le raisonnement attendu compte tenu de la forme de l'énoncé. Si on comprend que S_0 est la section de la cuve et non de la surface libre, et que le tube en B à la section S_2 , la conservation du volume de mercure s'écrit

$$S_1 z' = (S_0 - S_2) z''$$

et le résultat final devient

$$\Delta P = g z \left[\rho_1 \left(\frac{S_2}{S_1} + \frac{S_2}{S_0 - S_2} \right) + \rho_2 \left(1 - \frac{S_2}{S_1} \right) \right]$$

qui ne fait pas apparaître clairement les rapports des sections demandés.

3. On calcule

$$\Delta P = 9,81 \times 30 \times 10^{-3} \left[13,6 \times 10^3 \left(\frac{1}{20} + \frac{1}{20 \times 10} \right) + 1,26 \times 10^3 \left(1 - \frac{1}{20} \right) \right] = 572 \text{ Pa}$$

soit $\Delta P = 5,72 \text{ mbar}$.

La sensibilité est

$$\frac{z}{\Delta P} = 5,24 \text{ mm/mbar}.$$

Pour le baromètre de Torricelli, on a initialement

$$P^\circ = \rho_1 g h_1.$$

Quand la pression varie, on a

$$P^\circ + \Delta P = \rho_1 g (h_1 + z)$$

soit

$$\Delta P = \rho_1 g z.$$

La sensibilité est alors

$$\frac{z}{\Delta P} = \frac{1}{\rho_1 g} = 0,75 \text{ mm/mbar}.$$

Le baromètre différentielle est nettement plus sensible que le baromètre de Torricelli.

8 — Hémisphères de Magdebourg

Sur chaque côté, il faut exercer une force qui s'oppose à la résultante des forces de pression atmosphérique s'exerçant sur une demi-sphère.

On sait que le résultante des forces de pression uniforme s'exerçant sur la surface fermée constituée d'une demi-sphère fermée par une paroi plane (disque de rayon R) est nulle.

En intensité, la résultante des forces de pression atmosphérique s'exerçant sur la demi-sphère est donc égale à la force de pression sur le disque, soit

$$F = P \pi R^2 = 10^5 \times \pi \times 0,28^2 = 2,5 \times 10^4 \text{ N}$$

soit une force équivalente à un poids de 2,5 tonnes!

10 — Juste un doigt!

Notons $\vec{F}_{d \rightarrow e}$ la force exercée par le doigt sur l'eau.

Bilan des forces s'exerçant sur le système {eau+récipient} :

- force $\vec{F}_{d \rightarrow e}$ exercée par le doigt;
- poids $m\vec{g}$;
- force $\vec{F}_{b \rightarrow r}$ exercée par la balance sur le récipient.

L'équilibre s'écrit

$$\vec{F}_{d \rightarrow e} + m\vec{g} + \vec{F}_{b \rightarrow r} = \vec{0}.$$

L'eau exerce sur le doigt immergé une force de pression qui est la poussée d'Archimède :

$$\vec{F}_{e \rightarrow d} = \vec{\Pi}_A$$

soit en notant V le volume immergé du doigt et μ la masse volumique de l'eau

$$\vec{F}_{e \rightarrow d} = -\mu V \vec{g}.$$

Par le principe des actions réciproques, le doigt exerce sur l'eau la force

$$\vec{F}_{d \rightarrow e} = -\vec{F}_{e \rightarrow d} = \mu V \vec{g},$$

d'où

$$\mu V \vec{g} + m\vec{g} + \vec{F}_{b \rightarrow r} = \vec{0}.$$

La balance indique l'intensité (convertie en masse en divisant par g) de la force exercée par le récipient sur la balance, soit d'après le principe des actions réciproques

$$\vec{F}_{r \rightarrow b} = -\vec{F}_{b \rightarrow r} = \mu V \vec{g} + m\vec{g}.$$

La balance indique donc une masse apparente

$$m_{\text{app}} = \mu V + m.$$

Il s'agit donc d'évaluer le volume de la première phalange de l'index. On peut la considérer comme cylindrique, de diamètre $D = 1,5$ cm et de hauteur $H = 3$ cm (mesuré sur mon doigt!). Son volume est donc

$$V = H\pi \frac{D^2}{4} 5,3 \text{ cm}^3 \approx 5 \text{ cm}^3 = 5 \text{ mL}.$$

La masse du fluide déplacé est donc $m' = \mu V = 5$ g. La balance doit indiquer $m_{\text{app}} = 155$ g.

La preuve par l'image :



11 — Quand la routourne tourne!

1. La pression varie avec l'altitude. Cette dernière variant périodiquement quand la tourne tourne (régulièrement), on mesure la variation de pression observée sur le graphe.

La pression est maximale quand la nacelle est au plus bas, et diminue avec l'altitude. Partant du bas, on y retourne 4 fois : la nacelle fait **4 tours** (dont 3 de façon quasi-régulière).

2. Méthode « exacte » : modèle de l'atmosphère isotherme, à partir de $\vec{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$. On a $\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{MP}{RT} g$. On considère la température T constante, d'où

$$P(z) = P(0) \exp\left(-\frac{z}{H}\right) \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT}{Mg}.$$

On prend l'origine $z = 0$ à la position basse de la nacelle.

La pression diminue de $\Delta P > 0$ à l'altitude D , soit

$$P(0) - \Delta P = P(0) \exp\left(-\frac{D}{H}\right).$$

On en déduit $D = -H \ln\left(1 - \frac{\Delta P}{P(0)}\right)$. On donne $\Delta P = 467$ Pa, la pression au point le plus bas peut être estimée à $P(0) = 1013$ hPa = $1,013 \times 10^5$ Pa. On obtient le diamètre de la grande roue : $D = 38$ m.

On peut avantageusement faire des hypothèses simplificatrices en calculant la valeur de H .

— On calcule $H = 8,3 \times 10^3$ m. On a donc $D \ll H$, ce qui permet d'écrire $P(z) = P(0) \left(1 - \frac{z}{H}\right)$. On en déduit

$$D = \frac{\Delta P}{P(0)} H = 38 \text{ m}.$$

— On peut aussi supposer que l'air est incompressible sur une très faible variation d'altitude, avec une masse volumique $\rho = \frac{MP(0)}{RT}$. On a donc $\frac{dP}{dz} = -\rho g = -\frac{Mg}{RT} P(0) = -\frac{P(0)}{H}$ et on retrouve le résultat précédent.

3. On peut estimer la période de rotation sur la graphé : $T = 85$ s. On en déduit

$$v = \frac{D}{2} \omega = \frac{D}{2} \frac{2\pi}{T} = \frac{D\pi}{T} = \frac{38\pi}{85}$$

soit $v = 1,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

L'accélération centripète vaut

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{2v^2}{D},$$

soit $a = 0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \ll g$: la grande roue n'est pas un manège à sensations!

12 — Modèle de l'atmosphère

L'air atmosphérique est considéré comme un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Le champ de pesanteur est uniforme, de valeur $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

La verticale ascendante est repérée par \vec{e}_z . Au niveau du sol, en $z = 0$, on donne $P_0 = P(0) = 10^5 \text{ Pa}$ et $T(0) = T_0 = 310 \text{ K}$.

1. Relation de la statique des fluides :

$$\frac{dP}{dz} = -\mu g.$$

L'équation d'état du gaz parfait donne

$$P \frac{V}{n} = RT = P \frac{M}{\mu}$$

d'où

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{PMg}{RT}.$$

Avec $T = T_0$, on a

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT_0} dz$$

d'où

$$P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H_1}} \quad \text{et} \quad H_1 = \frac{RT_0}{Mg}.$$

On calcule $H_1 = 9,1 \times 10^3 \text{ m}$.

2. Avec

$$T(z) = T_0 + \lambda z$$

on a

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{R} \frac{dz}{T_0 + \lambda z}$$

soit

$$\int_{P_0}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{\lambda R} \int_0^z \frac{\lambda dz}{T_0 + \lambda z}$$

d'où

$$\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = -\frac{Mg}{\lambda R} \ln\left(\frac{T_0 + \lambda z}{T_0}\right).$$

On a donc

$$P(z) = P_0 \left(1 + \frac{\lambda z}{T_0}\right)^{-\frac{Mg}{\lambda R}}.$$

où $\lambda = -5 \times 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{m}^{-1}$ est appelée gradient thermique de l'atmosphère.

Déterminer la loi $P(z)$.

3. Si $z \ll H_1$, on a $\frac{|\lambda|z}{T_0} \ll 1$, ce qui permet de linéariser l'expression précédente :

$$P(z) \approx P_0 \left(1 - \frac{Mg}{\lambda R} \frac{\lambda z}{T_0}\right)$$

soit

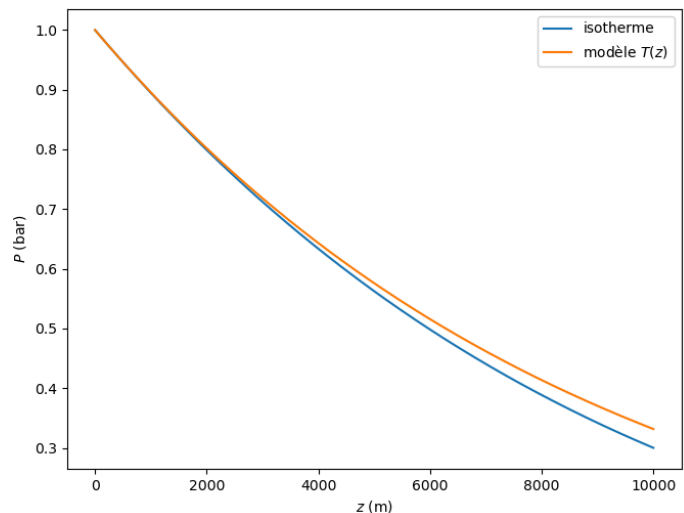
$$P(z) \approx P_0 \left(1 - \frac{Mgz}{RT_0}\right).$$

La linéarisation du modèle isotherme donne

$$P_T(z) \approx P_0 \left(1 - \frac{z}{H_1}\right) = P_0 \left(1 - \frac{Mgz}{RT_0}\right).$$

On retrouve la même loi approchée de pression avec les deux modèles.

Pour information, voici l'évolution de la pression avec les deux modèles :



13 — Océan isotherme

La masse volumique de l'eau dans un océan varie avec la pression selon la loi

$$\rho = \rho_0 [1 + a(P - P_0)].$$

1. La loi de la statique des fluides s'écrit

$$\frac{dP}{dz} = \rho g = \rho_0 [1 + a(P - P_0)] g$$

d'où après séparation des variables

$$\frac{1}{a} \int_{P_0}^{P(z)} \frac{a dP}{1 + a(P - P_0)} = \rho_0 g \int_0^z dz$$

soit

$$\frac{1}{a} \ln[1 + a(P - P_0)] = \rho_0 g z.$$

On a donc

$$1 + a(P - P_0) = e^{a\rho_0 g z}$$

soit

$$P(z) = P_0 + \frac{e^{a\rho_0 g z} - 1}{a}.$$

2. La profondeur augmente exponentiellement avec une distance caractéristique $\frac{1}{a\rho_0 g}$. Les profondeurs faibles sont petites devant cette distance, ce qui revient à se placer à

$$a\rho_0 g z \ll 1.$$

On peut donc linéariser $e^{a\rho_0 g z} \approx 1 + a\rho_0 g z$, d'où

$$P(z) \approx P_0 + \rho_0 g z.$$

On retrouve l'expression de la pression obtenue en considérant l'eau comme incompressible de masse volumique ρ_0 .

3. Avec le modèle proposé, on calcule

$$P(1 \text{ km}) = 9,905 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

Avec le modèle incompressible, on obtient

$$P_{\text{inc}}(1 \text{ km}) = 9,900 \times 10^6 \text{ Pa}.$$

L'écart relatif est

$$\frac{P(1 \text{ km}) - P_{\text{inc}}(1 \text{ km})}{P(1 \text{ km})} = 0,05 \text{ \%}.$$

Il est très faible.

14 — Montgolfière

Soit m_p la masse des personnes transportées. L'ensemble de la montgolfière et de ce qu'elle transport est soumis à :

- son poids $(M + m_p + m_i)g$ en prenant en compte la masse m_i d'air chaud dans l'enveloppe;
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi}_A$.

On modélise l'air chaud par un gaz parfait. Le volume V_0 contient une masse d'air

$$m_i = \mu_i V_0.$$

L'équation d'état s'écrit

$$P_e \frac{V_0}{n_i} = P_e \frac{M_e}{\mu_i} = RT_i$$

d'où

$$\mu_i = \frac{P_e M_e}{RT_i}$$

et

$$m_i = \frac{P_e M_e}{RT_i} V_0.$$

L'équation d'état appliquée à l'air extérieur permet d'écrire

$$\mu_e = \frac{P_e M_e}{RT_e},$$

La masse du fluide de remplacement est la masse d'air extérieur de masse volumique μ_e occupant le volume V_0 , soit $\mu_e V_0$. La poussée d'Archimède a donc pour composante sur la verticale Oz ascendante

$$\Pi_A = \mu_e V_0 g = \frac{P_e M_e}{RT_e} V_0 g.$$

La montgolfière décolle si la poussée d'Archimède est supérieure au poids de l'ensemble, soit

$$\Pi_A > (M + m_p + m_i)g$$

qui donne

$$\frac{P_e M_e}{RT_e} V_0 > M + m_p + \frac{P_e M_e}{RT_i} V_0.$$

La masse des personnes doit vérifier

$$m_p < \frac{P_e M_e}{RT_e} V_0 \left(1 - \frac{T_e}{T_i}\right) - M.$$

Application numérique :

$$m_p < \frac{10^5 \times 29 \times 10^{-3} \times 2000}{8,31 \times 298} \left(1 - \frac{298}{400}\right) - 300$$

soit $m_p < 297 \text{ kg}$.

En prenant pour une personne une masse de 70 kg, on trouve au maximum 4 personnes (avec 85 kg, on se limite à 3 personnes).