Convergences de suites de fonctions, limites, continuité, dérivabilité :

Exercice 1 On considère la suite de fonctions dont le terme général est : $f_n \ : \ x \mapsto \dfrac{n^3 x}{n^4 + x^4}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction à préciser.
2. Que dire de $f_n(n)$? Que peut-on en conclure ?
3. Montrer que la suite (f_n) est uniformément convergente sur tout ensemble du type $[-a, a]$.

⋆ **Exercice 2** CCINP 2024 sans préparation On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \begin{cases} [-1;1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(nx)e^{-n^2x^2} \end{cases}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) sur $[-1;1]$.
2. Étudier la convergence uniforme de la suite (f_n) sur $[\alpha;1]$ avec $\alpha \in]0;1[$, puis sur $[0;1]$.

Exercice 3 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$ on pose $f_n(x) = \dfrac{(\ln x)^{2n} - 1}{(\ln x)^{2n} + 1}$.

1. Étudier la convergence simple sur $]0; +\infty[$.
2. Étudier la convergence uniforme sur des intervalles inclus dans $]0; +\infty[$.

Exercice 4 (TPE) On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$.

1. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$.
2. A-t-on convergence uniforme ?
3. Prouver la convergence uniforme sur $[a; +\infty[$, lorsque $a > 0$.

⋆ **Exercice 5** On définit, pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$: $f_n(x) = \dfrac{nx^3}{1 + nx^2}$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la suite $(f'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement mais pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$ on considère $f_n(x) = \dfrac{nx^2e^{-nx}}{(1 - e^{-x})^2}$.

1. Étudier la convergence simple sur $]0; +\infty[$.
2. Préciser $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x)$.
   En déduire que (f_n) ne converge pas uniformément sur $]0; +\infty[$.
3. Montrer que (f_n) converge uniformément sur tout segment $[a; b]$ de $]0; +\infty[$.
4. Montrer que pour $a > 0$, la suite (f_n) converge uniformément sur $[a; +\infty[$.

Exercice 7 Mines-Télécom 2024 Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto \dfrac{e^{-x}}{1 + n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0; 1]$.
2. Soit $a \in]0; 1[$. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a; 1]$.
3. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$.
4. Trouver la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

⋆ **Exercice 8** Mines 2025 On note $\forall n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction g.

2. Montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$. pouvait-on s'attendre à un tel résultat au regard du cours ?

Interversion limite/intégrale

• **Exercice 9** CCINP 2019

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la suite de fonctions (f_n) par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ $f_n(x) = x(1 + n^\alpha e^{-nx})$.

1. Étudier la convergence simple de cette suite (f_n) et déterminer sa limite.

2. Pour quelles valeurs de α a-t-on de la convergence uniforme sur $\mathbb{R}^+$?

3. Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})dx$.

⋆ **Exercice 10** entrainement à l'application de la convergence dominée

Étudier la limite de la suite (I_n) définie par :

a) $\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{t^n \ln t}{t+1}dt$ *b)* (*M.T.* 25) $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n\sin(\frac{x}{n})}{x(1+x^2)}dx$ *c)* $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\sin^{2n}(t)dt$

d) $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{n^2x^2e^{-n^2x^2}}{1+x^2}dx$ *e)* $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^n}}{\sqrt{x}}dx$ *f)* $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{ch^n(x)}$

g) (*M.T.* 24) $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nt)}{1+nt+t^2}dt$ *h)* (*M.T.* 25) $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2+t^ne^{-t}}$ *i)* (*Navale* 25) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^n}{1+x^{n+2}}dx$

⋆ **Exercice 11** *idée classique à retenir pour fixer les bornes.*

1. Montrer que $x \mapsto e^{-x}\ln(x)$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

2. En utilisant $\varphi_n(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x) & \text{si } x \in]0,n[\\ 0 & \text{si } x \geq n \end{cases}$,

montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \ln(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}\ln(x)dx$.

• **Exercice 12** CCINP 2024 sans préparation Montrer, en établissant d'abord l'existence des intégrales, que :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{x}\left[1-\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\right]dx = \int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{x}dx.$$

⋆ **Exercice 13** CCINP 2025 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\displaystyle I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^4x^3}dx$.

1. Justifier l'existence de I_n.

2. Montrer que $\displaystyle I_n = \frac{1}{n^{5/3}}J_n$ avec $\displaystyle J_n = \int_0^{+\infty} \frac{n^{1/3}\sin(n^{-1/3}t)}{1+t^3}dt$.

3. Montrer que la suite (J_n) admet pour limite $\displaystyle K = \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^3}dt$.

4. À l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle K = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^3}$.

5. Montrer que $2K = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3} dt = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.

6. En déduire un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

• **Exercice 14** CCINP 2023

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(n+x)}{\sqrt{x}(n+x)} dx$.

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente.

2. Déterminer la limite de la suite (I_n).

3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}(n+x)}$.

4. En déduire un équivalent de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Convergences de séries de fonctions, limites, continuité, dérivabilité

⋆ **Exercice 15** CCINP 2022 + 2023 On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^3 + x^2}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 Mines-Télécom 2024

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0;1]$ on pose $u_n(x) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n}$ et on note $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$.

1. Montrer que S est de classe C^1 sur $[0;1]$.

2. Calculer $S'(1)$.

Exercice 17 Navale 2024 On pose pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \dfrac{x}{n^{x+1}}$ et $f = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

1. Déterminer D, l'ensemble de définition de f.

2. Sur quel intervalle f est-elle continue ?

Exercice 18 CCINP 2023 +2024 Soient $\alpha > 0$ et $f_\alpha : t \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sin^\alpha t \cos^n t$.

1. Étudier la convergence simple de la série et donner une expression simple de $f_\alpha(t)$.

2. Pour quelles valeurs de α, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_\alpha(t) dt$ converge-t-elle ?

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(\alpha) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^\alpha t \cos^n t \, dt$.

Pour quelles valeurs de α, la série $\sum u_n(\alpha)$ converge-t-elle ? Calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(3)$.

⋆ **Exercice 19** Mines-Télécom 2022 On considère la fonction $f(x) = \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x \ln n}$.

1. Déterminer le domaine de définition D_f de f.

2. Montrer que f est continue sur D_f.

3. Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4. Déterminer les limites de f sur D_f.

• **Exercice 20** CCINP 2024 sans préparation Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $g_n : y \mapsto \dfrac{(-1)^n}{n + (\ln n)^y}$.

1. Étudier la convergence simple de la série $\sum g_n$.

2. Lorsqu'elle existe étudier la continuité de la fonction $F : y \mapsto \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n + (\ln n)^y}$.

• **Exercice 21** CCINP 2019
On définit la suite de fonction $(u_n)_{n\geq 2}$ par $\forall n \geq 2, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad u_n(x) = \dfrac{\ln(x)}{x^n \ln(n)}$.

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}$ de la série des u_n.
On note S sa somme.

2. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathcal{D}$.

3. **a.** Montrer que $\left\| \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \right\| \leq \dfrac{1}{\ln(n+1)}$ sur $\mathcal{D}$.

b. Montrer que S est continue sur $\mathcal{D}$.

4. Est-ce que S est intégrable sur $\mathcal{D}$?

Exercice 22 CCINP 2022 +2024 On considère la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(nx)}{n^2}$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que f admet une limite en $+\infty$ et calculer là.

3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

4. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.

5. Quelle est la particularité de la courbe de f ?

⋆ **Exercice 23** M.T. 2025 On pose : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $u_n(x) = \dfrac{1}{1 + n^2 x^2}$

1. Montrer que $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

2. Montrer que S est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$.

3. Montrer que $S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\pi^2}{6} \cdot \dfrac{1}{x^2}$. *On admettra que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 24 Mines-Télécom 2024 On considère la fonction S définie par $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 x + n}$.

1. Déterminer le domaine de définition de S.

2. La fonction S est-elle de classe C^1 sur ce domaine ?

3. Trouver un équivalent de S en $+\infty$.

Exercice 25 Mines-Télécom 2023 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = e^{-x\sqrt{n}}$ et $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

1. Donner le domaine de définition de f.

2. Montrer que f est continue sur $]0; +\infty[$.

3. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^k}\right)$.

⋆ **Exercice 26** Mines-Télécom 2023 On définit lorsque c'est possible $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \arctan(e^{-nx})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f.

2. On pose $g_x : t \mapsto \arctan(e^{-tx})$.

a. Montrer que $\int_0^{+\infty} g_x(t)dt \geq f(x) \geq \int_0^{+\infty} g_x(t)dt + \frac{\pi}{4}$.

b. Montrer qu' il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{x\to0}{\sim} \frac{C}{x}$.

Exercice 27 CCINP 2022 Pour tout réel x convenable, on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n^2}$.

1. Donner le domaine de définition D de f.

2. Donner le domaine de dérivabilité D' de f.

3. Donner un équivalent de f en 1^-. *Indication : penser à utiliser une comparaison série intégrale.*

Interversion série/intégrale

⋆ **Exercice 28** CCINP 2021 Soit (I_n) la suite définie par $I_n = \int_0^1 \ln(1+t^n)dt$.

1. Montrer la convergence de (I_n) et donner sa limite.

2. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}\int_0^1 \frac{\ln(1+u)}{u}du$.

3. On admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\pi^2}{6n}$.

Exercice 29 Mines-Télécom 2024

1. Montrer que $x \mapsto \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$.

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que $x \mapsto \sin(x)e^{-nx}$ est intégrable sur $]0; +\infty[$ et calculer son intégrale.

3. Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x-1}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Exercice 30 CCINP 2023
On considère l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{sh(t)}dt$.

1. L'intégrale I est-elle convergente ?

2. Montrer que $\forall t \in]0;+\infty[$, $\dfrac{\sin t}{sh(t)} = 2e^{-t}\sin(t)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-2nt}$ puis écrire I sour forme d'une somme.

Exercice 31 M.T. 2025 On note sous réserve d'existence : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(\sqrt{x})dx$, $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$.
Montrer que I et S existent puis que $I = S$.

⋆ **Exercice 32** M.T. 2025 On note $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)$.

1. Montrer l'existence de $I = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

2. Exprimer f sous la forme d'une série et calculer I, en sachant que $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Exercice 33 CCINP 2022 On considère l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 t\frac{(\ln t)^2}{(1-t)^2}dt$.

1. Justifier l'existence de l'intégrale.

2. Montrer l'égalité suivante : $I = 2\left(\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^3} + \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\right)$.

• **Exercice 34** Mines-Télécom 2023 On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{x-1}}{e^t+1}dt$.

1. Donner le domaine de définition de φ.

2. Étudier la continuité de φ.

3. Montrer que $\forall x > 0$, $\varphi(x) = \Gamma(x)\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ avec $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

Exercice 35 CCINP 2024-2025 avec préparation L'objectif de l'exercice est de démontrer la formule suivante : $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}dt = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n(2n-1)^2}$ et d'en déduire une valeur de $I = \displaystyle\int_0^1\frac{\ln(t^2)\ln(1-t^2)}{t^2}dt$.

1. Montrer que l'intégrale précédente est convergente.

2. Donner la décomposition en série entière de $\ln(1-t^2)$. <u>Réponse :</u> $\forall t \in]-1,1[$, $\ln(1-t^2) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{t^{2n}}{n}$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{2}{n}x^{2n-2}\ln x & \text{si } x \in]0;1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Étudier la convergence normale de la série $\sum f_n$ sur $[0;1]$.

4. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f_n = \frac{2}{n(2n-1)^2}$.

5. Conclure soigneusement.

6. Déterminer a, b, c trois réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{2}{n(2n-1)^2} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{2n-1} + \dfrac{c}{(2n-1)^2}$.

7. En déduire une expression de I.