Chapitre VII : Suites et séries de fonctions :

- Suites de fonctions :
  - ⋆ La convergence simple : (f_n) cvs vers f sur I si $\forall x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
  - ⋆ La convergence uniforme : (f_n) cvu vers f sur I si $\|f_n - f\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
    - Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur I qui cvu sur (tout segment de) I vers f alors f est continue sur I.
  - ⋆ La convergence préservant la classe C^k.
    - Si les f_n sont de classe C^1 sur I, (f_n) converge simplement vers f sur I et (f_n') converge uniformément vers g sur (tout segment de) I alors f est de classe C^1 sur I et $f' = g$.
    - Si les f_n sont de classe C^k sur I, $(f_n^{(i)})$ converge simplement vers f_i sur I pour tout $i \in [\![0; k-1]\!]$ et $(f_n^{(k)})$ converge uniformément vers f_k sur (tout segment de) I alors f_0 est de classe C^k sur I et $f_0^{(i)} = f_i$.

- Interversion limite et intégrale : sous quelles conditions a-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)dt$?
  - ⋆ Avec de la cvu sur un segment : Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a;b]$ qui cvu sur $[a;b]$ vers f alors f est intégrable sur $[a;b]$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt$.
  - ⋆ Le théorème de la convergence dominée : Si (f_n) est une suite de fonctions continues (par morceaux) sur I qui cvs sur I vers f elle aussi continue par morceaux sur I. Si de plus il existe une fonction φ positive, continue par morceaux et intégrale sur I vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \in I$, $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ alors f et les f_n sont intégrables sur I et $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I f(t)dt$.

- Séries de fonctions :
  - ⋆ La convergence simple. La série $\sum f_n$ cvs sur I si $\forall x \in I$, $\sum f_n(x)$ converge.
  - ⋆ La convergence uniforme. La série $\sum f_n$ cvu sur I si $\sum f_n$ cvs sur I et $\left\| \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} f_n \right\|_{\infty,I} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$.
  - ⋆ La convergence normale. La série $\sum f_n$ cvn sur I si $\sum \|f_n\|_{\infty,I}$ converge.
  - ⋆ On a *cvn* $\Longrightarrow$ *cvu* $\Longrightarrow$ *cvs*.
  - ⋆ Si les f_n sont continues sur I et que $\sum f_n$ cvu sur I alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est continue sur I.
  - ⋆ Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \underset{x\to a}{\to} \ell_n$ et si $\sum f_n$ cvu sur I alors la série $\sum \ell_n$ converge, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ admet une limite finie en a et $\lim\limits_{x\to a} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \ell_n$.
  - ⋆ Si les f_n sont de classe C^1 sur I, si $\sum f_n$ cvs sur I et si $\sum f_n'$ cvu sur I alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^1 et $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n'$.
  - ⋆ Si les f_n sont de classe C^k sur I, si $\sum f_n^{(i)}$ cvs sur I et si $\sum f_n^{(k)}$ cvu sur I alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n$ est de classe C^k et $\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n\right)^{(i)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n^{(i)}$.

Questions de cours :

- Montrer qu'une boule fermée d'un espace vectoriel (E, N) est une partie convexe de E.
- Citer correctement un théorème du chapitre sur les suites et séries de fonctions.
- On note $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

  a. Montrer que ζ est continue sur $]1; +\infty[$.

  b. Déterminer la limite de $\zeta(x)$ en $+\infty$.