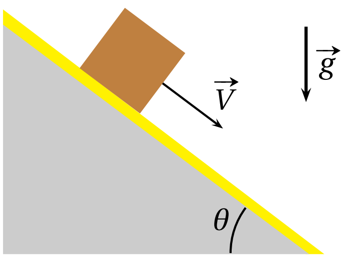
TD phénomènes de transport — Dynamique des fluides

1 — Bloc glissant sur de l'huile

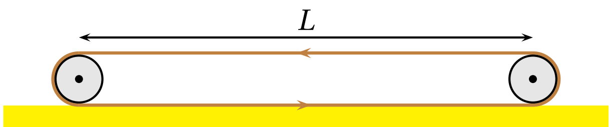
Un bloc de masse m glisse sur un plan incliné lubrifié par une mince couche d'huile de viscosité η. La surface de bloc en contact avec l'huile est S, et l'épaisseur de la couche d'huile h.



En supposant un profil de vitesse linéaire dans la couche d'huile, déterminer la vitesse du bloc quand ce dernier glisse avec une vitesse constante.

2 — Courroie sur un film d'huile

La courroie est entraînée à la vitesse V constante, et est en contact avec une couche d'huile de viscosité η. On note L la longueur en contact avec l'huile, b la largeur de la courroie et h l'épaisseur de la couche d'huile.



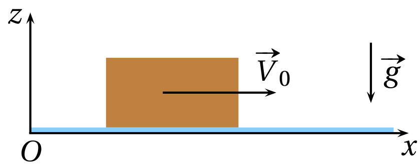
1. En supposant un profil de vitesse linéaire dans la couche d'huile, déterminer la puissance P à fournir pour maintenir la vitesse de la courroie constante, en fonction de h, L, V, b et η.

2. Calculer P dans le cas d'une courroie se déplaçant à $V = 2{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ sur un film d'huile SAE 30W à 20 °C pour laquelle $\eta = 0{,}40\ \mathrm{kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-1}}$, avec $L = 2$ m, $b = 60$ cm et $h = 3$ cm.

3 — Freinage d'un bloc

On considère un solide de masse $m = 30$ kg en translation sur le plan (Oxy). Il glisse sur une fine couche d'eau d'épaisseur $e = 1$ mm.
La surface de contact du solide avec l'eau est $S = 400\ \mathrm{cm^2}$. La viscosité dynamique de l'eau est notée η.

On considère que l'écoulement de l'eau sous le bloc est en régime permanent, avec un profil de vitesse de la forme $v(z) = az + b$.



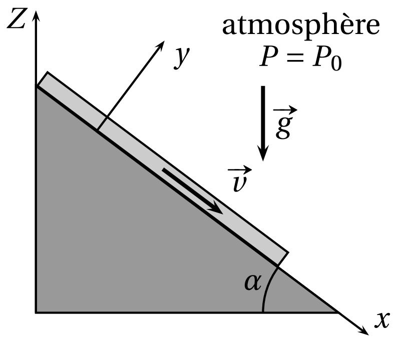
1. Le solide étant animé d'une vitesse $\vec{V}_0 = V_0\,\vec{u}_x$ constante, déterminer complètement le profil de vitesse $v(z)$.

2. Déterminer l'expression de la force exercée par l'eau sur le bloc.

3. On suppose que les expressions précédentes restent valables quand la vitesse du bloc varie, en remplaçant $\vec{V}_0$ par $\vec{V}(t) = V(t)\,\vec{u}_x$. Le bloc est lancé avec une vitesse initiale $V_0 = 2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.
Établir l'expression de sa vitesse $\vec{V}(t)$ et calculer la distance L qu'il parcourt avant de s'arrêter.

4 — Écoulement sur un plan incliné

Une couche mince d'huile (viscosité $\eta = 1$ Pl, masse volumique $\rho = 0{,}9\cdot 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$), d'épaisseur e, coule le long d'un plan incliné dont la ligne de plus grande pente fait un angle α avec l'horizontale.



Le champ des vitesse, indépendant du temps, est de la forme

$$\vec{v} = v(y)\,\vec{e}_x.$$

On néglige les forces de viscosité sur l'interface air/huile.

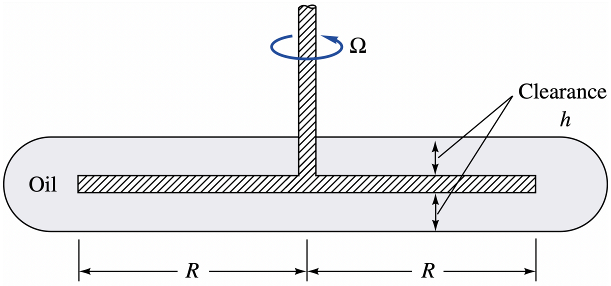
1. Déterminer le profil de vitesse $v(y)$.

2. Établir une relation entre l'épaisseur e et le débit massique D_m pour une largeur L de l'écoulement.

3. Calculer la vitesse maximale.

5 — Couple sur un disque en rotation

Un disque de rayon R tourne à la vitesse angulaire constante Ω à l'intérieur d'un récipient cylindrique rempli d'huile de viscosité η.



En supposant un profil de vitesse linéaire, et en négligeant la force exercée sur le bord du disque, déterminer l'expression du couple exercé par les forces visqueuses sur le disque.

6 — Oléoduc

Du fioul de masse volumique $\rho = 910\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et de viscosité dynamique η est transporté de A vers B à travers une conduite cylindrique d'axe horizontal, de longueur $L = 2$ km et de rayon $R = 8$ cm, avec un débit volumique $Q = 36\ \mathrm{m^3 \cdot h^{-1}}$. Grâce à une pompe, on maintient une différence de pression entre les points d'entrée A et de sortie B telle que $P_A = 3$ bar et $P_B = 0{,}4$ bar. On se place en régime stationnaire et on suppose l'écoulement laminaire et piloté par la viscosité.
On rappelle la résistance hydraulique d'une conduite cylindrique de longueur L et de rayon R :

$$R_\mathrm{h} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}.$$

1. Calculer la vitesse débitante U du fioul.

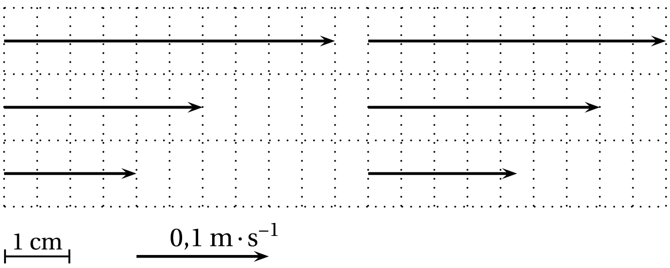
2. Calculer la viscosité dynamique et la viscosité cinématique du fioul transporté.

3. Calculer le nombre de Reynolds $\mathcal{R}e$ de cet écoulement et justifier les hypothèses faites.

4. Quel doit être le rayon R_0 d'une conduite cylindrique qui transporte de l'eau (viscosité cinématique $\nu_{\mathrm{eau}} = 9 \times 10^{-7}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$) à la vitesse moyenne de $2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pour assurer la similitude dynamique de ces écoulement avec celui du fioul étudié ?

7 — Mesure de viscosité par lecture d'une carte des vitesses

On donne la carte partielle du champ des vitesses d'un écoulement stationnaire incompressible d'un fluide newtonien de masse volumique $\mu = 1500\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.
La pression est uniforme dans tout le fluide et on néglige le poids.



Donner une estimation numérique de la viscosité du fluide.

8 — Fioul dans une conduite

Du fioul parcourt un tuyau cylindrique de diamètre $D = 30$ cm, de longueur $L = 1$ km. Sa masse volumique est $\mu = 870\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et sa viscosité cinématique est $\nu = 5 \times 10^{-5}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$. L'écoulement est laminaire de la forme $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$ en coordonnées cylindriques. La vitesse moyenne sur tout le tuyau est $v_{\mathrm{moy}} = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. La loi de vitesse à l'intérieur du tuyau est donnée, en coordonnées cylindriques, par $v(r) = 2(1 - 44{,}44 r^2)$.

1. Vérifier que cette loi est cohérente (v_{moy}, conditions aux limites).

2. Calculer le débit volumique.

3. Qu'est-ce qu'un écoulement laminaire ? Quel critère peut-on utiliser pour prédire si un écoulement a des chances de l'être ? L'écoulement de fluide décrit ici risque-t-il d'être turbulent ?

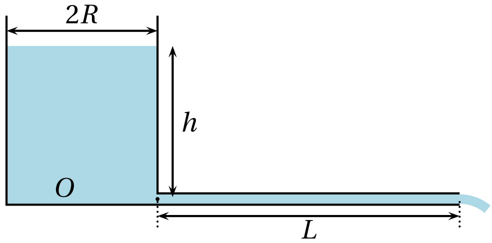
4. Le fluide est newtonien. Écrire l'expression de la force vectorielle $\mathrm{d}\vec{F}_{\mathrm{i->e}}$ exercée dans une tranche de longueur $\mathrm{d}z$ par le fluide intérieur à un cylindre de rayon r sur le fluide extérieur.

5. Calculer la force due à la viscosité exercée sur la paroi.

6. Montrer que la pression est une fonction affine de z. En raisonnant sur une pellicule cylindrique de longueur L, comprise entre r et $r + \mathrm{d}r$, déterminer l'écart de pression entre l'entrée et la sortie du tuyau.

9 — Viscosimètre de Poiseuille

Un liquide de viscosité cinématique ν s'écoule lentement (l'écoulement est quasi-stationnaire) d'un réservoir cylindrique de rayon R dans un tube horizontal de longueur L et de rayon a.



1. Quelles hypothèses vous semblent-il raisonnable d'émettre dans les différentes parties de l'écoulement ?

2. Établir l'équation différentielle satisfaite par la hauteur $h(t)$ du fluide dans le récipient, en faisant apparaître un temps caractéristique τ. La résoudre en posant $h(t=0) = h_0$.

3. Il a fallu un temps $\Delta t = 59$ min pour que le niveau du liquide passe de $h_0 = 6$ cm à $h(\Delta t) = 3$ cm. Déterminer la viscosité cinématique ν du liquide sachant que $R = 2$ cm, $a = 0{,}5$ mm, $L = 50$ cm et $g = 9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

4. Calculer la vitesse débitante de l'écoulement dans le tuyau, puis vérifier la pertinence des hypothèses faites.

10 — Écoulement sanguin

Un liquide visqueux newtonien incompressible de masse volumique μ, de viscosité dynamique η, s'écoule dans un tuyau cylindrique horizontal de rayon R et de longueur L. Le régime d'écoulement est laminaire et stationnaire, avec un débit volumique D_v.
La vitesse en un point situé à la distance r de l'axe du tuyau, de symétrie axiale d'axe Oz, obéit à la loi

$$\vec{v}(r) = B\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]\vec{u}_z .$$

Les données sont μ, η, R, L et le débit volumique D_v.

1. Expliciter le coefficient B en fonction des données.

2. Le module de la force tangentielle exercée par le fluide, à cause de sa viscosité, sur la paroi interne du tuyau est

$$F = 8\eta\frac{L}{R^2}D_\mathrm{v} .$$

2.a) Démontrer cette relation en précisant clairement le raisonnement.

2.b) Préciser sur un schéma le sens de cette force.

3. Le maintien du mouvement stationnaire du fluide nécessite une différence entre la pression P_e à l'entrée du tuyau et la pression P_s à la sortie :

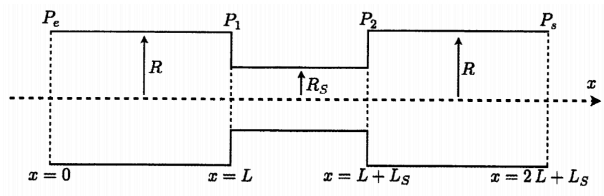
$$P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s} = \frac{F}{\pi R^2} .$$

Justifier qualitativement cette relation.

4. En déduire l'expression de la résistance hydraulique R_h en fonction des données.

11 — Sténose

Une sténose correspond à une réduction brutale et localisée du diamètre d'un vaisseau sanguin. Schématiquement, cette situation peut être représentée comme étant la superposition de trois tronçons cylindriques, de même axe et de rayons R, R_s et R différents, comme illustré sur la figure.



La sténose correspond au tronçon de plus faible rayon et est située entre les abscisses $x = L$ et $x = L + L_\mathrm{s}$.

1. Représenter l'allure des lignes de courant de l'écoulement. Que peut-on dire de la vitesse de l'écoulement dans la zone sténosée ?

2. En faisant des hypothèses raisonnables, exprimer puis calculer numériquement le débit volumique Q parcourant le faisceau sanguin.

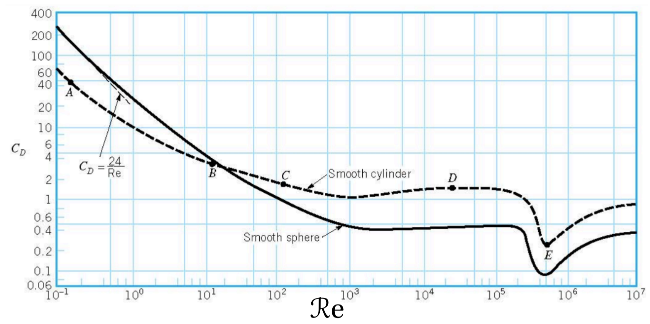
3. Évaluer numériquement le nombre de Reynolds $\mathcal{R}e$ dans la partie sténosée et dans les parties non sténosées. Conclure quant à la validité du modèle utilisé.

4. Citer une technique pouvant être utilisée pur diagnostiquer une sténose.

Données : $R = 6$ mm ; $2L + L_\mathrm{s} = 8$ cm ; $\Delta P = P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s} = 40$ Pa ; $L_\mathrm{s} = 1$ cm ; $R_\mathrm{s} = 2$ mm.
Masse volumique du sang : $\rho = 1060\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.
Viscosité dynamique du sang : $\eta = 6\ \mathrm{mPa \cdot s}$.

12 — Tennis et golf

On donne l'évolution du coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds :



1. Calculer la force de traînée s'exerçant sur une balle de tennis de rayon $R = 33$ mm, lancée à $200\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

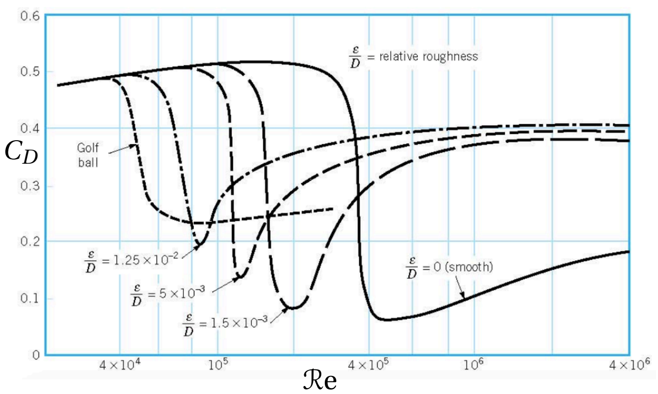
Viscosité cinématique de l'air : $\nu_{\mathrm{air}} = 15 \times 10^{-6}\ \mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$.

Masse volumique de l'air : $\rho = 1{,}23\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

Comparer au poids de la balle ($m = 58$ g) et à la poussée d'Archimède.

2. Que se passe-t-il au point E ? Est-il accessible avec une balle de tennis ?

3. Quand la balle n'est pas lisse, le coefficient de traînée ne dépend pas que du nombre de Reynolds mais aussi de la rugosité relative $\varepsilon_r = \varepsilon / D$.



Quel phénomène, en terme d'écoulement, est à mettre en rapport avec les courbes ci-dessus ?

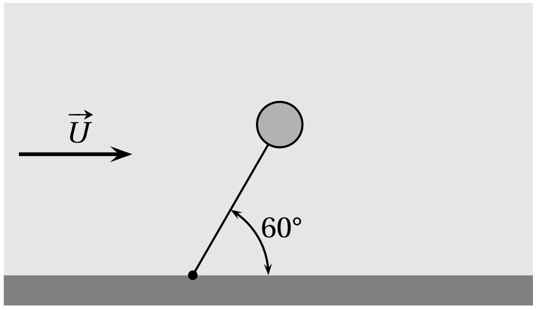
Discuter de l'intérêt des alvéoles sur une balle de golf.

13 — Vitesse d'écoulement d'une rivière

Une sphère de liège de 2 pouces (*inches*) de diamètre est attachée au fond d'une rivière par un câble fin. Sachant que le coefficient de traînée est de 0,5 et que l'on néglige la masse et la traînée du câble, déterminer la vitesse U d'écoulement de la rivière.

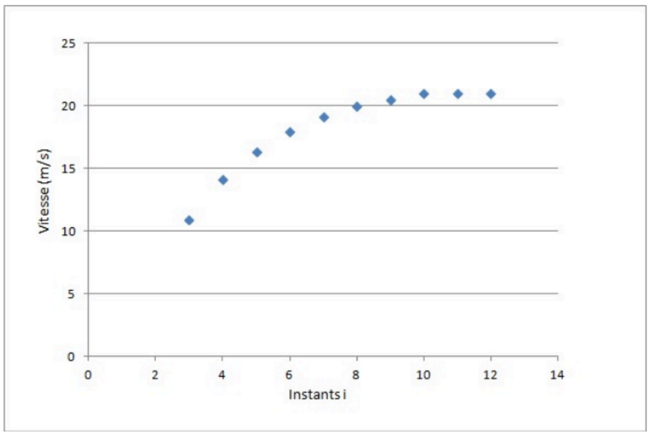
Vérifier la pertinence de la valeur du coefficient de traînée.

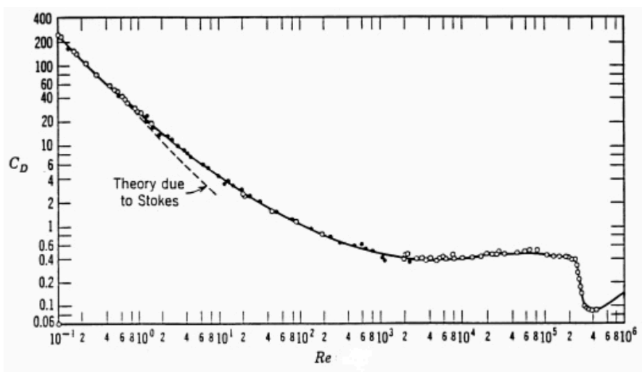
Le poids spécifique (ρg) du liège est de $13\ \mathrm{lb \cdot ft^{-3}}$. On donne $1\ \mathrm{lb} = 4{,}448\ \mathrm{N}$, $1\ \mathrm{ft} = 0{,}3048\ \mathrm{m}$ et $1\ \mathrm{inch} = 2{,}54\ \mathrm{cm}$.



14 — Ballon de foot

Dans une enceinte contenant de l'air, on lâche un ballon de football de masse $m = 500$ g d'une hauteur de 27 m. Par vélocimétrie laser, on mesure sa vitesse à différents instants t_i, tels que $t_{i+1} - t_i = 30$ ms. On donne de plus le coefficient de traînée d'une sphère en fonction du nombre de Reynolds.





Déterminer le diamètre du ballon de football.

15 — Montée de lave

On s'intéresse à la montée stationnaire de la lave (liquide incompressible newtonien de viscosité $\eta = 20\,\mathrm{kPa\cdot s}$ et de masse volumique $\rho = 2700\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$) le long d'une cheminée volcanique. La cheminée est assimilée à un cylindre vertical d'axe Oz, de hauteur $h = 5\,\mathrm{km}$ et de rayon $R = 10\,\mathrm{m}$.
On cherche le champ des vitesses sous la forme $\vec{v} = v(r,z)\vec{e}_z$.

1. La vitesse $v(r,z)$ dépend-elle des deux variables r et z ? Pourquoi ?

2. Montrer que le débit volumique de lave s'écrit

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta h}(P_{\text{inf}} - P_0 - \rho g h)$$

où $P_{\text{inf}} = 2\,\mathrm{kbar}$ désigne la pression régnant à la base de la cheminée, et P_0 la pression atmosphérique.

3. Calculer numériquement le débit volumique Q ainsi que les vitesses maximale $v_{\max}$ et débitante u.

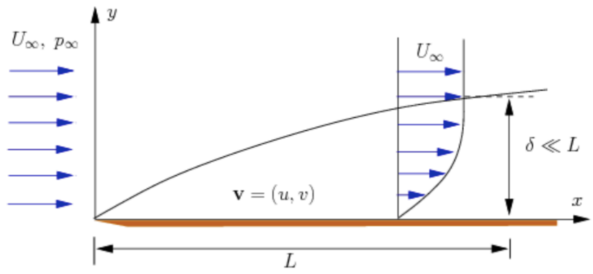
4. Discuter la pertinence des hypothèses faites.

16 — Transfusion sanguine

On désire réaliser une transfusion sanguine à l'aide d'un poche de sang. On utilise pour cela un tuyau souple et suffisamment large pour que l'on puisse y négliger les phénomènes liés à la viscosité du sang. Au bout de ce tuyau, une aiguille horizontale assure le passage du sang vers la veine du patient allongé sur le lit.
La surface libre du sang dans la poche est située à une hauteur H au-dessus de l'aiguille et est soumise à la pression atmosphérique P_0.
Dans l'aiguille, de longueur $L = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ et de rayon intérieur $a = 0{,}10\,\mathrm{mm}$, les phénomènes visqueux ne sont plus négligeables.
La viscosité du sang vaut $\eta = 1{,}6\,\mathrm{mPa\cdot s}$ et sa masse volumique vaut $\rho = 1{,}0\,\mathrm{kg\cdot L^{-1}}$. La pression dans la veine est constante et supérieure à la pression atmosphérique : $P_v = P_0 + \Delta P$, avec $\Delta P = 7\,\mathrm{mbar}$. Enfin, on précise que l'écoulement dans la poche et dans le tuyau souple sont très lents.
À quelle hauteur H faut-il placer la poche de sang ? Commenter.

17 — Couche limite

On étudie la couche limite prenant naissance sur une plaque dans un écoulement laminaire de vitesse caractéristique $\vec{U} = U_\infty \vec{e}_x$.
On note δ l'épaisseur de la couche limite à la distance L du bord de la plaque.



1. Estimer la durée τ du transport de quantité de mouvement convectif du fluide entre le bord de la plaque et un point à la distance L de ce bord.

2. Pendant cette durée, le transfert convectif de quantité de mouvement se fait sur une distance δ perpendiculairement à la plaque. Estimer δ en fonction de τ et de la viscosité cinématique $\nu = \eta/\mu$.

3. Rappeler l'expression du nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement autour de la plaque. En déduire l'expression de l'épaisseur δ de la couche limite en fonction de L et $\mathcal{R}e$.

18 — Viscosimètre à chute de bille

On considère une grande éprouvette verticale de rayon $R = 5\,\mathrm{cm}$ remplie d'huile d'olive, de masse volumique $\mu_h = 916\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et de viscosité η inconnue. Une bille sphérique en acier, de masse volumique $\mu_b = 7880\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et de rayon $r = 250\,\mathrm{\mu m}$, est lâchée sans vitesse initiale à la surface libre de l'huile. On propose de modéliser la force de viscosité exercée par l'huile sur la bille au moyen de la loi de Stokes.

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la vitesse de la bille.

2. Montrer qualitativement que la vitesse tend vers une valeur limite v_ℓ à déterminer.

On suppose que la bille atteint très rapidement cette vitesse limite. On mesure la durée $\Delta t = 83\,\mathrm{s}$ nécessaire pour que la bille parcourt une distance $H = 100\,\mathrm{cm}$.

3. Calculer la viscosité de l'huile.

4. Vérifier la validité des différentes hypothèses mises en jeu dans cette méthode de mesure.

19 — Dimensionnement

On étudie un avion de longueur $L = 5$ m destiné à voler à une vitesse de 200 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ dans l'air.

1. Une maquette de cet avion à l'échelle $1/10^e$ est étudiée dans une soufflerie à air. Déterminer la vitesse de l'écoulement.

2. Au lieu d'une soufflerie, on réalise la même étude dans une veine liquide. Quelle vitesse doit avoir l'eau par simuler la réalité ?

---

20 — Écoulement de Couette généralisé

On considère un écoulement entre deux plans horizontaux parallèles à l'axe Ox, distants de a, le plan inférieur $y = 0$ étant fixe, et le plan supérieur $y = a$ se déplaçant à la vitesse $V_0\vec{e}_x$ parallèlement à lui-même.
Les plaques sont de longueur L ($0 \leqslant x \leqslant L$) et de largeur b (selon Oz).
Dans tout l'exercice, la pesanteur est négligée. Le fluide est newtonien, de viscosité η et de masse volumique μ.
L'écoulement entre les deux plans est supposé laminaire et stationnaire, décrit par le champ des vitesses $\vec{v}(M,t) = v(y)\vec{e}_x$.

Écoulement de Couette plan

On n'impose aucune différence de pression entre $x = 0$ et $x = L$: la pression est donc uniforme dans le fluide : $P(x) = P_0$.

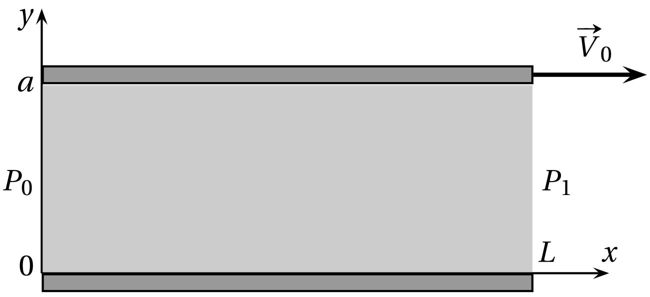
1. Établir le profil de vitesse $v(y)$.

2. Calculer le débit volumique Q et la vitesse débitante.

3. Calculer la force exercée par le fluide sur chacune des plaques.

Écoulement de Couette généralisée

On impose maintenant un gradient de pression parallèlement au plan, par les conditions aux limites $P(0) = P_0$ et $P(L) = P_1 = P_0 + \Delta P$ (le terme ΔP est algébrique).



4. Montrer que le gradient de pression $\dfrac{dP}{dx}$ est uniforme dans le fluide, et donner son expression en fonction de ΔP et L.

5. Exprimer le profil de vitesse $v(y)$ en fonction de ΔP, L, a, V_0 et η.

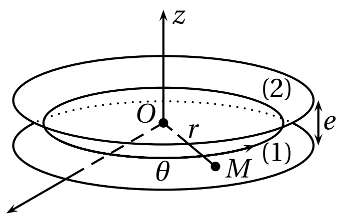
6. Exprimer le débit Q en fonction de ΔP, a, b, η et V_0.
Peut-on avoir $Q = 0$? Représenter l'allure du profil de vitesse dans ce cas.

7. Exprimer (toujours dans le cas $Q = 0$) la force exercée par le fluide sur chacune des plaques.

---

21 — Viscosimètre

Un fluide de viscosité η et de masse volumique μ occupe le volume délimité par deux plaques circulaires de rayon a, espacées de e, avec $e \ll a$. La plaque 1 est à la cote $z = 0$, la plaque 2 à $z = e$.



Les plaques tournent aux vitesses angulaires respectives ω_1 et ω_2 autour de Oz.

1. En régime laminaire, on cherche le champ des vitesses sous la forme $\vec{v}(M,t) = r\omega(z,t)\vec{e}_\theta$. Justifier.

2. En considérant un volume élémentaire compris entre r et $r + dr$, θ et $\theta + d\theta$, z et $z + dz$ et calculer la résultante des forces de viscosité qu'il subit. On admettra qu'elle ne fait intervenir que les contraintes de cisaillement s'exerçant sur les faces horizontales situées en z et $z + dz$.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\omega(z,t)$.

4. On se place en régime permanent, dans le cas où $\omega_2 = 0$ et $\omega_1 \neq 0$. Calculer le couple Γ subi par la plaque 2.