TD phénomènes de transport — Dynamique des fluides

2 — Courroie sur un film d'huile

1. On a un profil linéaire de vitesse $v(y)$, avec les conditions aux limites

$$v(y=0)=0 \quad \text{et} \quad v(y=h)=V\,.$$

On en déduit le champ des vitesses

$$\boxed{\vec{v}=V\frac{y}{h}\vec{e}_x}\,.$$

La force exercée par le fluide sur la surface $S=Lb$ est donnée par

$$\vec{F}_{\text{visc}}=-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}(h)Lb\vec{e}_x=-\frac{\eta V}{h}Lb\vec{e}_x,.$$

Sa puissance vaut alors

$$P_{\text{visc}}=\vec{F}\cdot V\vec{e}_x=-\frac{\eta V^2}{h}Lb\,.$$

Il faut fournir la puissance opposée pour maintenir la vitesse de la courroie constante, soit

$$\boxed{P=\frac{\eta V^2}{h}Lb}\,.$$

En supposant un profil de vitesse linéaire dans la couche d'huile, déterminer la puissance P à fournir pour maintenir la vitesse de la courroie constante, en fonction de h, L, V, b et η.

2. Application numérique :

$$P=\frac{0{,}40\times(2{,}5)^2}{3\times10^{-2}}\times2\times0{,}60$$

soit $\boxed{P=100\text{ W}}$.

3 — Freinage d'un bloc

1. Les conditions aux limites sont

$$v(0)=0=b \quad \text{et} \quad v(e)=V_0=ae\,,$$

d'ou

$$\boxed{v(z)=V_0\frac{z}{e}}\,.$$

2. La force exercée par un fluide *sous* une surface S est

$$\vec{F}=-\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}S\vec{u}_x$$

soit

$$\boxed{\vec{F}=-\eta\frac{V_0}{e}S\vec{u}_x}\,.$$

3. PFD en projection selon $\vec{u}_x$ appliqué au bloc :

$$m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=-\eta\frac{V(t)}{e}S\,,$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}+\frac{V(t)}{\tau}=0 \quad \text{avec} \quad \tau=\frac{me}{\eta S}\,.$$

Avec $V(0)=V_0$, on obtient $\boxed{V(t)=V_0e^{-t/\tau}}$.
En intégrant, on obtient $x(t)=-\tau V_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}+A$.
Avec $x(0)=0$, on obtient $x(t)=\tau V_0\left[1-\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]$.
On a alors $\lim_{t\to\infty}x(t)=\tau V_0=L$, d'où la distance d'arrêt

$$\boxed{L=\frac{meV_0}{\eta S}}\,.$$

Viscosité dynamique de l'eau : $\eta=10^{-3}$ Pl.
On calcule

$$L=\frac{30\times10^{-3}\times2}{1\times10^{-3}\times400\times10^{-4}}\,,$$

soit $\boxed{L=1500\text{ m}}$.

5 — Couple sur un disque en rotation

Nous allons considérer les actions visqueuses s'exerçant sur la partie supérieure du disque. Par symétrie, les actions s'exerçant sur la partie inférieure sont identiques.
À une distance r de l'axe, la vitesse d'un point du disque est

$$\vec{V}=r\Omega\vec{e}_\theta$$

en coordonnées cylindriques.
Le champ des vitesses dans l'huile est de la forme $\vec{v}=v(r,z)\vec{e}_\theta$ et vérifie les conditions aux limites

$$v(r,0)=r\Omega \quad \text{et} \quad v(r,h)=0$$

en prenant $z=0$ sur la face supérieure du disque (cf. schéma).
Le profil de vitesse étant linéaire (selon z), on a donc

$$\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{v(r,h)-v(r,0)}{h-0}=-\frac{r\Omega}{h}\,.$$

Considérons un élément de surface élémentaire en coordonnées polaires

$$\mathrm{d}\vec{S}=r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_z$$

à la distance r de l'axe, centré en $M(r,\theta)$.
La force exercée par le fluide sur cette surface est

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\text{sup}}=+\eta\frac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}S\vec{e}_\theta=-\eta\frac{r\Omega}{h}r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta\,.$$

Le moment exercé sur cette surface est

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\Gamma}_{\text{sup}} = \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{sup}} = r\,\overrightarrow{e}_r \wedge \left(-\eta \frac{r\Omega}{h}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e}_\theta$$
$$= -\eta \frac{\Omega}{h} r^3\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{e}_z = \mathrm{d}\Gamma\,\overrightarrow{e}_z\,.$$

Le moment total exercé sur la face supérieur vaut donc
On en déduit le moment total exercé sur la face supérieure :

$$\Gamma = -\eta \frac{\Omega}{h} \int_0^R r^3\,\mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = -\eta \frac{\Omega}{h} \frac{R^4}{4} 2\pi = \frac{\pi\eta\Omega}{2h} R^4\,.$$

Par symétrie, on a sur la face inférieure [1] $\mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{inf}} = \mathrm{d}\overrightarrow{F}_{\text{sup}}$, et le couple est identique.
Le moment total est donc $\overrightarrow{\Gamma} = \Gamma\,\overrightarrow{e}_z$, où le couple total exercé par les forces visqueuses sur le disque s'écrit

$$\boxed{\Gamma = -\frac{\pi\eta\Omega}{2h} R^4}\,.$$

---

6 — Oléoduc

1. La vitesse débitante est définie par $Q = U\pi R^2$, d'où

$$U = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{36/3600}{\pi \times (8\times 10^{-2})^2}$$

soit $\boxed{U = 0{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

2. On a

$$P_A - P_B = R_{\mathrm{h}} Q \quad \text{avec} \quad Q = \frac{8\eta L}{\pi R^4}$$

d'où

$$\eta = (P_A - P_B)\frac{\pi R^4}{8QL} = 2{,}6\times 10^5 \times \frac{\pi \times (8\times 10^{-2})^4}{8\times 36/3600 \times (2\times 10^3)}$$

soit $\boxed{\eta = 0{,}21\ \mathrm{Pl}}$.
La viscosité cinématique vaut $\nu = \eta/\rho$, soit $\boxed{\eta = 2{,}3\times 10^{-4}\ \mathrm{m^2\cdot s^{-1}}}$.

3. Le nombre de Reynolds vaut

$$\mathcal{R}\mathrm{e} = \frac{U\times(2R)}{\nu} = \frac{0{,}5\times 16\times 10^{-2}}{2{,}3\times 10^{-4}}$$

soit $\mathcal{R}\mathrm{e} = 3{,}5\times 10^2$.
On est bien dans le domaine d'un écoulement laminaire.

4. On a similitude entre les deux écoulements s'ils ont même nombre de Reynolds ; il faut donc

$$R_0 = \frac{\nu_{\text{eau}}\mathcal{R}\mathrm{e}}{2U} = \frac{(9\times 10^{-7})\times(3{,}5\times 10^2)}{2\times 2}$$

soit $\boxed{R_0 = 79\ \mu\mathrm{m}}$.

7 — Mesure de viscosité par lecture d'une carte des vitesses

D'après la carte des vitesses, le champ des vitesses est de la forme $\overrightarrow{v} = v(x,y)\,\overrightarrow{e}_x$.
On considère une « particule de fluide » de cote y_2, cubique, de 1 cm de côté.
L'accélération de la particule de fluide est donnée par

$$\overrightarrow{a} = (\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\,\overrightarrow{v} = v(x,y_2)\frac{\partial v(x,y_2)}{\partial x}\,\overrightarrow{e}_x\,.$$

On mesure sur la carte

$$v(x_1,y_2) = \frac{6}{4}\times 0{,}1 = 0{,}15\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

et

$$v(x_2,y_2) = \frac{7}{4}\times 0{,}1 = 0{,}175\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}\,.$$

On peut estimer

$$\frac{\partial v(x,y_2)}{\partial x} = \frac{v(x_2,y_2) - v(x_1,y_2)}{x_2 - x_1} = \frac{0{,}175 - 0{,}15}{5{,}5\times 10^{-2}}$$
$$= 0{,}455\ \mathrm{s^{-1}}\,.$$

On en déduit l'accélération de la particule de fluide :

$$a = v(x_1,y_2)\frac{\partial v(x,y_2)}{\partial x} = 0{,}15\times 0{,}455$$
$$= 6{,}8\times 10^{-2}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}\,.$$

La force visqueuse exercée sur la face supérieure de section S de la particule de fluide par le fluide au-dessus est

$$\overrightarrow{F}_{\text{sup}} = \eta\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right)_{\text{sup}} S\,\overrightarrow{e}_x\,,$$

avec $S = 1\times 10^{-4}\ \mathrm{m^2}$.
On peut estimer

$$\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right)_{\text{sup}} = \frac{v(x_1,y_3) - v(x_1,y_2)}{y_3 - y_2}$$

avec

$$v(x_1,y_3) = \frac{10}{4}\times 0{,}1 = 0{,}25\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

soit

$$\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right)_{\text{sup}} = \frac{0{,}25 - 0{,}15}{10^{-2}} = 10\ \mathrm{s^{-1}}\,.$$

On a donc la composante

$$F_{\text{sup}} = \eta\times 10\times 10^{-4} = 10^{-3}\eta\,.$$

De même, la face inférieur reçoit du fluide en dessous la force visqueuse

$$\overrightarrow{F}_{\text{inf}} = -\eta\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right)_{\text{inf}} S\,\overrightarrow{e}_x\,,$$

1. On a un signe − car le fluide est sous la plaque, mais le gradient de vitesse est lui aussi opposé.

On peut estimer

$$\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right)_{\text{inf}} = \frac{v(x_1,y_2)-v(x_1,y_1)}{y_2-y_1}$$

avec

$$v(x_1,y_1) = \frac{4}{4}\times 0{,}1 = 0{,}1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1},$$

d'où

$$\left(\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}\right)_{\text{inf}} = \frac{0{,}15-0{,}1}{10^{-2}} = 5\ \text{s}^{-1}.$$

On a donc la composante

$$F_{\text{inf}} = -\eta\times 5\times 10^{-4} = -5\times 10^{-4}\eta.$$

En notant $\ell^3 = 1\times 10^{-6}\ \text{m}^{-3}$ le volume de la particule de fluide, le principe fondamental de la dynamique projeté selon $\vec{e}_x$ s'écrit

$$\mu\ell^3 a = F_{\text{sup}} + F_{\text{inf}},$$

soit

$$1500\times(1\times 10^{-6})\times(6{,}8\times 10^{-2}) = (10^{-3}-5\times 10^{-4})\eta$$

d'où $\boxed{\eta = 0{,}2\ \text{Pl}}$.

8 — Fioul dans une conduite

1. En $r = D/2 = 0{,}15$ cm, on calcule

$$v(D/2) = 2\times 10^{-4}\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1} \approx 0\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

La loi est bien cohérente avec la condition sur la paroi (vitesse nulle).

Le débit volumique est donné par

$$D_\text{v} = \int_0^{0,15} v(r)2\pi r\,\text{d}r = 4\pi\int_0^{0,15}(r-44{,}44r^3)\,\text{d}r$$
$$= 4\pi\left[\frac{(0{,}15)^2}{2} - \frac{44{,}44}{4}(0{,}15)^4\right].$$

La vitesse moyenne est donnée par $D_\text{v} = \pi(0{,}15)^2 v_{\text{moy}}$, d'où

$$v_{\text{moy}} = 4\left[\frac{1}{2} - 11{,}11(0{,}15)^2\right] = 1\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

La loi de vitesse est donc cohérente avec la vitesse moyenne donnée.

2. Le débit volumique vaut $D_\text{v} = v_{\text{moy}}\pi\frac{D^2}{4}$, soit

$$\boxed{D_\text{v} = 70{,}7\times 10^{-3}\ \text{m}^3\cdot\text{s}^{-1} = 70{,}7\ \text{L}\cdot\text{s}^{-1}}.$$

3. Un écoulement est dit laminaire quand les lignes de courants sont rectilignes, parallèles entre elles (à une dimension). Un écoulement a des chances d'être laminaire si le nombre de Reynolds est tel que $\mathcal{R}\text{e} < 2000$.

Ici, on calcule

$$\mathcal{R}\text{e} = \frac{v_{\text{moy}}D}{\nu} = 6\times 10^3\ .$$

On a $\mathcal{R}\text{e} > 4000$: l'écoulement sera sans aucun doute turbulent.

[2] Dérivée droite car v ne dépend que de r.

4. On écrit la contrainte tangentielle visqueuse :

$$\text{d}\vec{F}_{\text{i->e}} = -\eta\frac{\text{d}v}{\text{d}r}\,\text{d}S\,\vec{e}_z$$

où $\text{d}S = 2\pi r\,\text{d}z$ est la surface latérale considérée. Le gradient de la vitesse normal à cette surface est la composante radiale [2] $\frac{\text{d}v}{\text{d}r}$. Le fluide intérieur correspond au fluide « en-dessous » dans la formule du cours : ici $\frac{\text{d}v}{\text{d}r} < 0$; le fluide intérieur va plus vite que le fluide extérieur, et exerce sur ce dernier une force selon $+\vec{e}_z$.

On a donc

$$\boxed{\text{d}\vec{F}_{\text{i->e}} = -2\pi\eta r\frac{\text{d}v}{\text{d}r}\,\text{d}z\,\vec{e}_z}.$$

5. Sur toute la paroi, la force due à la viscosité est donnée par

$$\vec{F} = -2\pi\eta\frac{D}{2}\frac{\text{d}v}{\text{d}r}(D/2)L\vec{e}_z$$
$$= -2\pi\eta\frac{D}{2}(-4)44{,}44\frac{D}{2}L\vec{e}_z = 88{,}88\pi\eta D^2 L\vec{e}_z.$$

Avec $\eta = \mu\nu$, on calcule $F = 88{,}88\pi\mu\nu D^2 L$ soit

$$\boxed{F = 1{,}1\times 10^3\ \text{N}}.$$

6. Les lignes de courants sont rectilignes, selon l'axe Oz de la conduite ; en régime stationnaire, elles s'identifient aux trajectoires des particules de fluides. Ces dernières ont donc un mouvement rectiligne et uniforme : leur accélération est nulle, ainsi donc que la somme des forces appliquées (d'après le PFD).

Se reporter au cours : on a montré que $\frac{\text{d}P}{\text{d}z}$ est une constante, c'est-à-dire que la pression est une fonction affine de z.

Considérons le pellicule cylindrique de longueur L, comprise entre r et $r+\text{d}r$. Toutes les particules de fluide qui la constitue ont une trajectoire rectiligne uniforme ; la quantité de mouvement de ce système étant constante, la somme des forces appliquées est nulle :

$$\text{d}F_\text{p}(0) + \text{d}F_\text{p}(L) + \text{d}F_{\text{visc}} = 0.$$

La composante selon $\vec{e}_z$ de le force de pression en amont vaut

$$\text{d}F_\text{p}(0) = 2\pi r P(0)\,\text{d}r.$$

La composante selon $\vec{e}_z$ de le force de pression en aval vaut

$$\mathrm{d}F_\mathrm{p}(L) = -2\pi r P(L)\,\mathrm{d}r\,.$$

La résultante des forces visqueuses s'écrit en ajoutant la résultante sur la face interne de surface $S(r)$ et la face externe de surface $S(r+\mathrm{d}r)$:

$$\mathrm{d}F_\mathrm{visc} = -\eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_r S(r) + \eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_{r+\mathrm{d}r} = \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(S(r)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r$$

soit comme $S(r) = 2\pi r L$,

$$\mathrm{d}F_\mathrm{visc} = 2\pi\eta L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right).$$

Le bilan des forces conduit alors à

$$0 = 2\pi r[P(0)-P(L)]\,\mathrm{d}r + 2\pi\eta L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)\mathrm{d}r$$

d'où

$$P(0)-P(L) = -\frac{\eta L}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right).$$

On calcule

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -4\times 44{,}44r\,;\quad r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -4\times 44{,}44r^2$$

d'où

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{8}{r}\times 44{,}44r = -8\times 44{,}44\,.$$

On en déduit l'écart de pression entre l'entrée et la sortie du tuyau :

$$P(0)-P(L) = 8\times 44{,}44\eta L = 356\mu\nu L\,.$$

On calcule $\boxed{\Delta P = 1{,}55\times 10^4\ \mathrm{Pa}}$.

9 — Viscosimètre de Poiseuille

1. On va considérer que la section S du réservoir est grande devant la section πa^2 du tuyau (ce qui revient à considérer $R \gg a$ comme le suggère la figure).

De la conservation du débit volumique on déduit que la vitesse du fluide dans le réservoir est très faible devant la vitesse du fluide dans le tuyau.

Nous pouvons dont faire l'hypothèse que le fluide est quasi-au repos dans le réservoir.

L'écoulement est lent dans le tuyau, donc nous allons supposer que cet écoulement est laminaire.

Enfin, le jet sort du tuyau à l'air libre, donc la pression à la sortie du tuyau est P_0, pression atmosphérique.

2. La loi de l'hydrostatique s'applique dans le réservoir (fluide au repos), donc la pression dans le fond du réservoir est

$$P_1 = P_0 + \mu g h\,.$$

Cette pression se retrouvant à l'entrée du tuyau, la surpression entre l'entrée et la sortie du tuyau est

$$\Delta P = P_1 - P_0 = \mu g h\,.$$

L'hypothèse d'un écoulement laminaire permet d'appliquer la loi de Poiseuille donnant le débit volumique :

$$D_\mathrm{v} = \frac{\pi a^4}{8\eta L}\Delta P = \frac{\pi a^4}{8\eta L}\mu g h\,.$$

On en déduit la vitesse débitante dans le tuyau par $D_\mathrm{v} = \pi a^2 U$, d'où

$$U = \frac{\mu g h a^2}{8\eta L}\,.$$

En fait, le niveau $h(t)$ baisse très lentement dans le récipient ; la vitesse d'un point de la surface libre est donc

$$V_\mathrm{sl} = -\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\,.$$

Attention au signe, $h(t)$ diminue quand le récipient se vide!

La conservation du débit volumique entre le récipient et le tuyau s'écrit

$$V_\mathrm{sl}\pi R^2 = U\pi a^2\,.$$

On a donc

$$-\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = U\frac{a^2}{R^2} = \frac{\mu g a^4}{8\eta L R^2}h(t)\,.$$

soit en notant $\nu = \eta/\mu$ la viscosité cinématique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + \frac{h(t)}{\tau} = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{8\nu L R^2}{g a^4}}\,.$$

La solution est

$$\boxed{h(t) = h_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}\,.$$

3. On donne

$$h(\Delta t) = h_0\,\mathrm{e}^{-\Delta t/\tau} = \frac{h_0}{2}$$

d'où

$$\Delta t = \tau\ln 2 = \frac{8\nu L R^2}{g a^4}\ln 2\,.$$

On en déduit

$$\nu = \frac{\Delta t g a^4}{2 L R^2\ln 2} = \frac{59\times 60\times 9{,}8\times(0{,}5\times 10^{-3})^4}{8\times 0{,}5\times(2\times 10^{-2})^2\ln 2}$$

soit $\boxed{\nu = 2{,}0\times 10^{-6}\ \mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-1}}$.

4. La vitesse débitante varie au cours du temps. Calculons sa valeur maximale, en $t = 0$:

$$U = \frac{\mu g h_0 a^2}{8\eta L} = \frac{g h_0 a - 2}{8\nu L} = \frac{R^2}{a^2}\frac{h_0}{\Delta t}\ln 2$$
$$= \left(\frac{2\times 10^{-2}}{0{,}5\times 10^{-3}}\right)^2 \frac{6\times 10^{-2}}{60\times 59}\ln 2$$

soit $\boxed{U_0 = 19\ \mathrm{mm\cdot s^{-1}}}$.

Le nombre de Reynolds associé à l'écoulement dans le tuyau est

$$\mathcal{R}\mathrm{e} = \frac{2aU}{\nu} = 9{,}4 \approx 10\,.$$

Cette valeur est bien compatible avec un écoulement laminaire.

10 — Écoulement sanguin

1. Le débit volumique est donné par

$$D_\mathrm{v} = \int_0^R 2\pi r\, v(r)\,\mathrm{d}r = 2\pi B\int_0^R \left(r - \frac{r^3}{R^2}\right)\mathrm{d}r$$
$$= 2\pi B\left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{2R^2}\right) = \frac{\pi B R^2}{2}\,.$$

On a donc

$$\boxed{B = \frac{2D_\mathrm{v}}{\pi R^2}}\,.$$

2.a) Le fluide exerce sur une longueur dz de paroi la force

$$\mathrm{d}F = -\eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_R 2\pi R\,\mathrm{d}z\,.$$

On a

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = -\frac{2B}{R^2}r = -\frac{4D_\mathrm{v}}{\pi R^4}r\,,$$

d'où

$$\mathrm{d}F = \eta\frac{4D_\mathrm{v}}{\pi R^3}2\pi R\,\mathrm{d}z = \eta\frac{8D_\mathrm{v}}{R^2}\mathrm{d}z\,.$$

Pour une longueur L, la résultante est donc

$$\boxed{F = 8\eta\frac{L}{R^2}D_\mathrm{v}}\,.$$

2.b) On a $F > 0$: cette force est dans le sens de l'écoulement.

3. La quantité de mouvement du fluide contenu dans une longueur L de tuyau étant constante, la somme des forces exercées est nulle. Selon la 3e de Newton, le tuyau exerce sur le fluide la force $-\vec{F}$, opposée à celle exercée par le fluide sur le tuyau. Selon Ox, on obtient alors

$$0 = P_\mathrm{e}S - P_\mathrm{s}S - F\,,$$

d'où, comme $S = \pi R^2$

$$\boxed{P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s} = \frac{F}{\pi R^2}}\,.$$

4. Compte tenu de l'expression de F établie précédemment, on a

$$P_\mathrm{e} - P_\mathrm{s} = 8\eta\frac{L}{\pi R^4}D_\mathrm{v} = R_\mathrm{h}D_\mathrm{v}\,,$$

d'ou

$$\boxed{R_\mathrm{h} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}}\,.$$

11 — Sténose

1. L'écoulement étant incompressible, la diminution de la section dans la zone sténosée se traduit par une **augmentation de la vitesse**.

2. Nous allons faire l'hypothèse d'un écoulement laminaire stationnaire. On se ramène donc à un écoulement de Poiseuille.

La résistance hydraulique de chaque partie saine du vaisseau est

$$R_\mathrm{h,v} = \frac{8\eta L}{\pi R^4}\,.$$

La résistance hydraulique de la partie sténosée est

$$R_\mathrm{h,s} = \frac{8\eta L_\mathrm{s}}{\pi R_\mathrm{s}^4}\,.$$

Les trois segments étant associés en série, la résistance équivalente est donnée par $R_\mathrm{h} = 2R_\mathrm{h,v} + R_\mathrm{h,s}$, soit

$$R_\mathrm{h} = \frac{8\eta}{\pi}\left(\frac{2L}{R^4} + \frac{L_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}^4}\right)\,.$$

On peut alors écrire

$$\Delta P = R_\mathrm{h}Q\,,$$

d'où l'expression du débit volumique

$$Q = \frac{\pi\Delta P}{8\eta}\frac{1}{\frac{2L}{R^4} + \frac{L_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}^4}}\,.$$

On calcule

$$Q = \frac{40\pi}{8\times(6\times 10^{-3})}\frac{1}{\frac{7\times 10^{-2}}{(6\times 10^{-3})^4} + \frac{10^{-2}}{(2\times 10^{-3})^4}} = 3{,}9\times 10^{-6}\ \mathrm{m^3\cdot s^{-1}}\,,$$

soit $\boxed{Q = 3{,}9\ \mathrm{mL\cdot s^{-1}}}$.

3. Le nombre de Reynolds dans les parties non sténosées s'écrit

$$\mathcal{R}\mathrm{e} = \frac{\rho v 2R}{\eta}$$

où la vitesse moyenne est donnée par $Q = v\pi R^2$. On en déduit $\boxed{\mathcal{R}\mathrm{e} = 72}$.

Dans la partie sténosée, on a de même

$$\mathcal{R}\mathrm{e}' = \frac{\rho v' 2R_\mathrm{s}}{\eta} = 220\,.$$

Dans les deux cas, l'hypothèse d'un écoulement laminaire est pertinente.

4. La vitesse d'écoulement étant plus grande dans la partie sténosée, on peut détecter cette différence de vitesse par échographie Doppler.

15 — Montée de lave

1. Le liquide étant incompressible, son écoulement l'est aussi ; on a donc

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{v} = v(r)\,\vec{e}_z}\,.$$

La vitesse ne dépend que de r.

2. Nous allons calculer $v(r)$ pour en déduire le débit.

Considérons comme système le tube de rayon r, d'épaisseur $\mathrm{d}r$, compris entre z et $z+\mathrm{d}z$.

Sa section est donc $\mathrm{d}S = 2\pi r\,\mathrm{d}r$ et son volume $\mathrm{d}\tau = 2\pi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$.

Les particules de fluides ont un mouvement rectiligne uniforme (lignes de courant rectilignes, égales aux trajectoires en régime stationnaire) ; leur accélération est donc nulle.

Le principe fondamentale de la dynamique s'écrit alors, en projection selon Oz

$$\begin{aligned} 0 &= P(z)2\pi r\,\mathrm{d}r - P(z+\mathrm{d}z)2\pi r\,\mathrm{d}r - \rho g 2\pi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \\ &\quad + \eta 2\pi(r+\mathrm{d}r)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_{r+\mathrm{d}r}\mathrm{d}z - \eta 2\pi r\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)_r \mathrm{d}z \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z}2\pi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z - \rho g 2\pi r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z + 2\pi\eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right]\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z \end{aligned}$$

soit après simplification

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right] - \rho g\,.$$

Le premier membre de l'égalité est indépendant de r tandis que le second est indépendant de z ; ces deux termes sont donc égaux à une constante. La loi $P(z)$ est donc affine ; en particulier

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = \frac{P(h)-P(0)}{h-0} = \frac{P_0 - P_{\text{inf}}}{h}\,.$$

On a donc

$$\frac{\eta}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right] - \rho g = \frac{P_0 - P_{\text{inf}}}{h}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right] = \frac{1}{\eta h}\left[P_0 - P_{\text{inf}} + \rho g h\right] r\,.$$

Intégrons une première fois :

$$r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2\eta h}\left[P_0 - P_{\text{inf}} + \rho g h\right] r^2 + A\,,$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2\eta h}\left[P_0 - P_{\text{inf}} + \rho g h\right] r + \frac{A}{r}\,.$$

Comme $\mathrm{d}v/\mathrm{d}r$ doit rester fini en $r=0$, on a $A=0$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2\eta h}\left[P_0 - P_{\text{inf}} + \rho g h\right] r\,.$$

Intégrons une seconde fois :

$$v(r) = \frac{1}{4\eta h}\left[P_0 - P_{\text{inf}} + \rho g h\right] r^2 + B\,.$$

La condition $v(R)=0$ permet d'écrire

$$v(r) = \frac{1}{4\eta h}\left[P_{\text{inf}} - P_0 - \rho g h\right]\left(R^2 - r^2\right)\,.$$

Le débit volumique est donné par

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^5 2\pi r\,v(r)\,\mathrm{d}r \\ &= \frac{2\pi}{4\eta h}\left(P_{\text{inf}} - P_0 - \rho g h\right)\int_0^R \left(rR^2 - r^3\right)\mathrm{d}r \\ &= \frac{\pi}{2\eta h}\left(P_{\text{inf}} - P_0 - \rho g h\right)\left(R^2\frac{R^2}{2} - \frac{R^4}{4}\right) \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{Q = \frac{\pi R^4}{8\eta h}\left(P_{\text{inf}} - P_0 - \rho g h\right)}\,.$$

➤ On aurait pu prendre comme système le cylindre de rayon r et de hauteur $\mathrm{d}z$. Le principe de la dynamique donne alors

$$0 = P(z)\pi r^2 - P(z+\mathrm{d}z)\pi r^2 - \rho g \pi r^2\,\mathrm{d}z + \eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}2\pi r\,\mathrm{d}z$$

d'où avec le même raisonnement que précédemment

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\rho g + \frac{2\eta}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{P_0 - P_{\text{inf}}}{h}\,.$$

On arrive alors directement à

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2\eta h}\left(P_0 - P_{\text{inf}} + \rho g h\right) r$$

faisant l'économie d'une intégration.

3. On calcule

$$Q = \frac{\pi \times 10^4}{8 \times 20 \times 10^3 \times 5000} \times \left(2\times 10^3 \times 10^5 - 10^5 - 2700 \times 9{,}8 \times 5000\right)$$

soit $\boxed{Q = 2{,}7\times 10^3\ \mathrm{m^3\cdot s^{-1}}}$.

La vitesse est maximale au centre :

$$v_{\max} = \frac{P_{\text{inf}} - P_0 - \rho g h}{4\eta h}R^2\,.$$

On calcule $\boxed{v_{\max} = 17\ \mathrm{m\cdot s^{1}}}$.

La vitesse débitante est donnée par $Q = \pi R^2 u$, d'où $\boxed{u = 8{,}5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.

4. Le nombre de Reynolds est donné par

$$\mathcal{R}\mathrm{e} = \frac{\rho u 2R}{\eta}\,.$$

On calcule $\boxed{\mathcal{R}\mathrm{e} = 23}$.

L'hypothèse d'un écoulement laminaire est cohérente.

21 — Viscosimètre

1. Le champ des vitesses proposé vérifie

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0\,.$$

Il correspond bien à un écoulement incompressible.

Il doit de plus vérifier l'adhérence du fluide aux parois mobiles.

Un point $M(r,\theta,0)$ du disque inférieur a une vitesse

$$\vec{v}(M) = r\omega_1\,\vec{e}_\theta\,.$$

Le champ des vitesses proposé permet de vérifier la continuité au contact de ce disque, avec

$$\omega(z=0) = \omega_1\,.$$

De même, un point $M(r,\theta,e)$ du disque supérieur a une vitesse $\vec{v}(M) = r\omega_2\,\vec{e}_\theta$.

Le champ des vitesses proposé permet de vérifier la continuité au contact de ce disque, avec

$$\omega(z=2) = \omega_2\,.$$

2. Considérons un volume élémentaire compris entre r et $r+\mathrm{d}r$, θ et $\theta+\mathrm{d}\theta$, z et $z+\mathrm{d}z$. La surface de ses sections inférieure et supérieure est $\mathrm{d}S = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.

Il subit de la part du fluide situé au-dessus, sur sa face à la cote $z+\mathrm{d}z$, la force de viscosité

$$\mathrm{d}\vec{F}_+ = +\eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right)_{z+\mathrm{d}z}\mathrm{d}S\,\vec{e}_\theta\,.$$

La force de viscosité exercée par le fluide situé en dessous sur sa face à la cote z est

$$\mathrm{d}\vec{F}_- = -\eta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right)_{z}\mathrm{d}S\,\vec{e}_\theta\,.$$

La résultante des forces de viscosité est donc

$$\mathrm{d}\vec{F} = \eta\left[\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right)_{z+\mathrm{d}z} - \left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right)_{z}\right] r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta$$

soit

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{F} = \eta\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z\,\vec{e}_\theta}\,.$$

3. En régime stationnaire, les trajectoires des particules de fluide s'identifient aux lignes de courant ; ces dernières sont des cercles d'axe Oz. Les particules de fluide ont donc un mouvement circulaire uniforme (la vitesse, ne dépendant pas de θ, reste constante sur une ligne de courant).

Par symétrie, la pression ne dépend pas de θ. Les seules forces s'exerçant selon $\vec{e}_\theta$ sont les forces de viscosité. La composante selon $\vec{e}_\theta$ de l'accélération étant nulle, le principe de la dynamique en projection selon $\vec{e}_\theta$ s'écrit

$$0 = \eta\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} = 0\,.$$

Avec $v(r,z) = r\omega(z)$, on en déduit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}z^2} = 0}\,.$$

4. L'équation précédente admet pour solution générale

$$\omega(z) = Az + B\,.$$

On a d'une part

$$\omega(0) = B = \omega_1$$

et d'autre part

$$\omega(e) = 0 = Ae + \omega_1\,.$$

On a donc

$$\omega(z) = \omega_1\left(1 - \frac{z}{e}\right).$$

On se place en régime permanent, dans le cas où $\omega_2 = 0$ et $\omega_1 \neq 0$. Calculer le couple Γ subi par la plaque 2.

Le fluide exerce sur l'élément de surface $\mathrm{d}S$ de la plaque 2 le moment

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\vec{\Gamma} = \mathrm{d}\Gamma\,\vec{e}_z &= \overrightarrow{OM}\wedge(-\eta)\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}\right)_{z=e}\mathrm{d}S\,\vec{e}_\theta \\ &= -r\eta\frac{\mathrm{d}[r\omega(z)]}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}S\,\vec{e}_z = r\eta\left(-r\frac{\omega_1}{e}\right)\mathrm{d}S\,\vec{e}_z\end{aligned}$$

d'où

$$\mathrm{d}\Gamma = \eta\frac{\omega_1}{e}r^2\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,.$$

Le couple total est donné par

$$\Gamma = \frac{\eta\omega_1}{e}\int_0^e r^3\,\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{\eta\omega_1}{e}\frac{e^4}{4}2\pi\,,$$

soit

$$\boxed{\Gamma = \frac{\pi\eta\omega_1}{2}e^3}\,.$$

➤ On peut mesurer Γ en reliant la plaque supérieure à un câble de constante de torsion C : la plaque tourne d'un angle $\theta_{\text{éq}}$ à l'équilibre, avec $C\theta_{\text{éq}} = \Gamma$. On peut alors en déduire la valeur de η : c'est le principe du viscosimètre de Couette.