

## DS n° 4 — Sujet 2

## Physique - chimie

## Partie I : Chute d'une gouttelette d'eau dans l'air... (Banque PT 2024)

Valeurs numériques pour tout le sujet :

- intensité de la pesanteur :  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;
- viscosité dynamique de l'air :  $\eta_a = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  ;
- viscosité dynamique de l'eau :  $\eta_e = 1 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  ;
- masse volumique de l'air :  $\rho_a = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;
- masse volumique de l'eau :  $\rho_e = 1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  .

Les résultats des applications numériques sont attendus avec seulement un chiffre significatif.

Un nuage est constitué d'une grande quantité de gouttelettes d'eau en suspension dans l'air. Il se forme par condensation de la vapeur d'eau naturellement présente dans l'atmosphère lorsque les conditions météorologiques sont adéquates. Ces gouttelettes en suspension grossissent en se réunissant sous l'effet des courants atmosphériques jusqu'à atteindre une taille critique, au-delà de laquelle elles tombent sous forme de pluie. Dans cette partie, nous allons étudier la chute d'une gouttelette d'eau à l'aide de deux modélisations pour l'atmosphère : le cas d'une atmosphère sèche, puis le cas d'une atmosphère humide.

### 1 Cas d'une atmosphère sèche

Dans un premier temps, on étudie la chute d'une gouttelette d'eau sphérique de masse volumique  $\rho_e$  et de rayon constant  $R = 0,2 \text{ mm}$  dans une atmosphère sèche, constituée d'air de masse volumique  $\rho_a$  et de viscosité dynamique  $\eta_a$ . On néglige tout phénomène d'évaporation au cours de cette chute. À l'instant  $t = 0$ , on suppose que la gouttelette quitte le nuage d'où elle provient, sans vitesse initiale.

Elle est alors soumise à trois forces au cours de sa chute :

- son poids  $\vec{P}$  ;
- la poussée d'Archimède exercée par l'air  $\vec{P}_A$  ;
- une force de frottement fluide exercée par l'air que l'on modélise sous la forme  $\vec{f} = -6\pi\eta_a R \vec{v}(t)$  où  $\vec{v}(t)$  est le vecteur vitesse de la gouttelette.

On définit l'axe  $(Oz)$  vertical descendant, comme représenté sur la figure I-1.

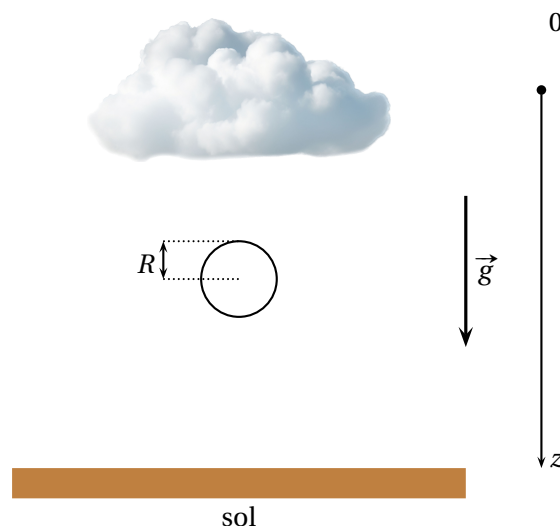


FIGURE I-1 – Chute d'un gouttelette d'eau de rayon  $R$  constant dans une atmosphère sèche

1. Exprimer la norme de la poussée d'Archimède subie par la gouttelette en fonction des données de l'énoncé.
2. Calculer numériquement le rapport, en norme, de la poussée d'Archimède sur le poids de la gouttelette, puis justifier qu'il est possible de négliger la poussée d'Archimède dans cette modélisation.

Dans la suite, on négligera ainsi toujours la poussée d'Archimède.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la composante  $v(t)$  de la vitesse de la gouttelette projetée sur l'axe  $(Oz)$  vertical descendant.
4. À partir de cette équation différentielle, définir un temps caractéristique  $\tau$  en fonction de  $R$ ,  $\rho_e$  et  $\eta_a$ , puis calculer sa valeur numérique.
5. En déduire l'expression de  $v(t)$  en fonction de  $g$ ,  $\tau$  et  $t$ .
6. Calculer numériquement la vitesse limite vers laquelle tend la gouttelette au cours de sa chute.
7. Calculer numériquement le nombre de Reynolds associé à l'écoulement de l'air autour de la gouttelette au cours de sa chute.

En utilisant la figure I-2, conclure quant à la validité de l'expression de  $\vec{f}$  adoptée.

## 2 Cas d'une atmosphère humide

On étudie maintenant la chute d'une gouttelette d'eau sphérique de masse volumique  $\rho_e$  dans une atmosphère humide, principalement constituée d'air de masse volumique  $\rho_a$  et de viscosité dynamique  $\eta_a$ . L'humidité du milieu fait croître le rayon  $r(t)$  de la gouttelette au cours de sa chute, et on note  $m(t)$  sa masse. À l'instant  $t = 0$ , on suppose que la gouttelette quitte le nuage d'où elle provient, sans vitesse initiale et avec un rayon initial  $r_0$ . En supposant que la poussée d'Archimède est toujours négligeable, la gouttelette est alors soumise à deux forces au cours de sa chute :

- son poids  $\vec{P}$ ;
- une force de frottement fluide exercée par l'air que l'on modélise sous la forme  $\vec{f} = -6\pi\eta_a r(t) \vec{v}(t)$  où  $\vec{v}(t)$  est le vecteur vitesse de la gouttelette.

On définit l'axe  $(Oz)$  vertical descendant, comme représenté sur la figure I-2.

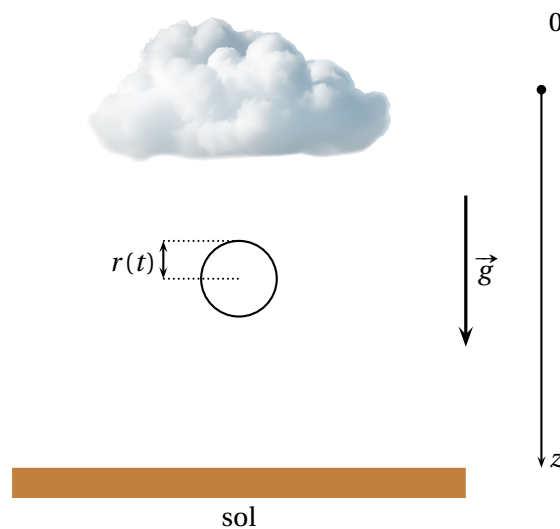


FIGURE I-2 – Chute d'une gouttelette d'eau de rayon variable  $r(t)$  constant dans une atmosphère sèche

8. En supposant que l'augmentation du volume de la gouttelette au cours du temps est proportionnelle à sa surface, justifier que son rayon peut alors s'exprimer sous la forme

$$r(t) = r_0 + kt$$

où  $k$  est une constante spécifique de l'humidité du milieu, que l'on ne cherchera pas à exprimer.

9. Exprimer  $\frac{dm}{dt}$  en fonction de  $\rho_e$ ,  $r_0$ ,  $k$  et  $t$ .

Dans le cas de ce système de masse variable  $m(t)$ , on peut montrer que la seconde loi de Newton reste valable dans un référentiel galiléen à condition de remplacer le terme  $\left\{ m \frac{d\vec{v}}{dt} \right\}$  par

$$\frac{dm \vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{dm}{dt} \vec{v}.$$

10. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la vitesse  $v(t)$  de la gouttelette projetée sur l'axe  $(Oz)$  vertical descendant peut alors s'écrire sous la forme

$$\frac{dv}{dt} + \left[ \frac{A}{r_0 + kt} + \frac{B}{(r_0 + kt)^2} \right] v(t) = g,$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes que l'on exprimera en fonction de  $\rho_e$ ,  $\eta_a$  et  $k$ .

Quelques instants après le début de sa chute, le rayon de la gouttelette devient suffisamment important pour que le terme  $\frac{B}{(r_0 + kt)^2}$  de l'équation différentielle soit négligeable devant le terme  $\frac{A}{r_0 + kt}$ .

11. En prenant en compte cette simplification, résoudre l'équation différentielle obtenue en résolvant d'abord l'équation sans second membre, puis en cherchant une solution particulière de l'équation complète sous la forme d'une fonction affine, afin d'en déduire l'expression de  $v(t)$  en fonction de  $g$ ,  $r_0$ ,  $k$  et  $t$ .

Lorsque le rayon de la gouttelette d'eau dépasse quelques millimètres, il n'est plus réaliste de considérer que la forme de celle-ci est encore sphérique. En effet, la traînée aérodynamique donne alors une forme de disque incurvé à la gouttelette d'eau, qu'il serait nécessaire de prendre en compte.

12. Grâce à votre culture scientifique, donner le nom de l'énergie par unité de surface qui est responsable de la forme sphérique des gouttelettes d'eau de petite taille.

## Partie II : Remplissage d'une nappe phréatique... (Banque PT 2024)

Une partie des eaux de pluie tombées au sol va s'infiltrer à travers les porosités des roches calcaires le constituant jusqu'à rejoindre des nappes phréatiques. Le renouvellement de l'eau présente dans ces nappes phréatiques est essentiel, car elles représentent aujourd'hui la principale source d'eau potable que nous consommons. À l'aide d'un modèle d'écoulement simple, nous allons estimer dans cette partie le temps mis par une gouttelette d'eau de pluie pour rejoindre une nappe phréatique située à un kilomètre de profondeur.

On modélise le sol poreux dans lequel s'écoule l'eau comme un ensemble de capillaires cylindriques verticaux de hauteur  $H = 1$  km et de rayon  $a = 1 \mu\text{m}$ . L'eau est assimilée à un fluide newtonien incompressible de viscosité dynamique  $\eta_e$  et de masse volumique  $\rho_e$ . L'étude des symétries et des invariances permet de supposer que la vitesse de l'eau dans un capillaire s'écrit en coordonnées cylindriques sous la forme

$$\vec{v} = v(r) \vec{e}_z,$$

où  $(Oz)$  est l'axe vertical ascendant, comme représenté sur la figure II-1.

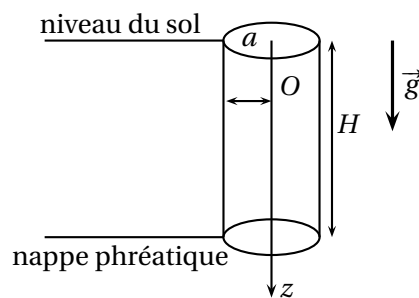


FIGURE II-1 – Capillaire modélisant le sol poreux dans lequel s'écoule l'eau jusqu'à la nappe phréatique

1. Exprimer la condition aux limites imposée sur la vitesse de l'eau en l'assimilant à un fluide newtonien.

En supposant que la nappe phréatique communique avec l'atmosphère extérieure, sa pression s'égalise avec la pression atmosphérique, et on peut alors montrer que la vitesse de l'eau dans le capillaire vérifie l'équation

$$\rho_e \vec{g} + \eta_e \Delta \vec{v} = \vec{0},$$

où l'opérateur laplacien appliqué à la vitesse s'exprime sous la forme

$$\Delta \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dv}{dr} \right) \vec{e}_z.$$

2. Montrer que la vitesse de l'eau peut s'exprimer sous la forme

$$v(r) = K(a^2 - r^2)$$

où  $K$  est une constante que l'on exprimera en fonction des données du problème.

3. Exprimer le temps minimal  $\Delta t_{\min}$  mis par une gouttelette d'eau pour rejoindre la nappe phréatique depuis le niveau du sol en fonction des données de l'énoncé, puis calculer sa valeur numérique.

4. Exprimer le débit volumique  $D_v$  à travers une section du capillaire en fonction des données de l'énoncé.

5. Exprimer le temps moyen  $\Delta t_{\text{moy}}$  mis par une gouttelette d'eau pour rejoindre la nappe phréatique en fonction des données de l'énoncé, puis calculer sa valeur numérique.

En France, une « eau de source » est une eau naturellement propre à la consommation humaine, qui est prélevée dans une nappe phréatique souterraine, puis mise en bouteille sans subir de traitement chimique. Tandis que l'eau de pluie est une eau très pure qui ne contient quasiment pas de minéraux, une eau de source présente une concentration en sels minéraux qui peut être assez importante.

6. À l'aide de la modélisation précédente, proposer une explication à cette différence de minéralisation entre l'eau de pluie et l'eau de source.

### Partie III : Production hydroélectrique d'un barrage... (Banque PT 2024)

Une autre partie des eaux de pluie tombées au sol va ruisseler jusqu'à atteindre différents cours d'eau (ruisseau, rivière, fleuve...). Pour récupérer l'énergie renouvelable de ces eaux qui regagnent les mers et les océans, des barrages hydroélectriques ont été édifiés sur de nombreux cours d'eau dans le monde. Ces centrales hydroélectriques fournissent actuellement 15 % de la production mondiale d'électricité, ce qui correspond à une puissance d'environ 1,4 TW. Le barrage le plus haut du monde est le barrage de Jinping 1 (锦屏一级), qui est construit sur la rivière Yalong (雅砻江) dans la province du Sichuan (四川) en Chine. Il s'agit d'un barrage-voûte voûte en béton de 305 m de haut constitué d'un arc de cercle de 568 m de long. Au niveau du barrage, le débit volumique de la rivière Yalong est en moyenne de  $2,0 \times 10^{10} \text{ m}^3/\text{an}$ . Dans cette partie, nous allons estimer la résultante des forces de pression qui s'exercent sur un tel ouvrage lorsque son réservoir d'eau est rempli.

On modélise le barrage-voûte par un quart de cylindre d'axe  $(Oz)$  vertical ascendant, de rayon  $R$  et de hauteur  $H$ , comme représenté sur la figure III-1. On suppose que son réservoir rempli d'eau peut se vider dans un cours d'eau situé en contrebas à l'altitude  $z = 0$ . La pression de l'air est supposée uniforme dans tout l'espace et égale à la pression atmosphérique  $P_0 = 1 \text{ bar}$ .

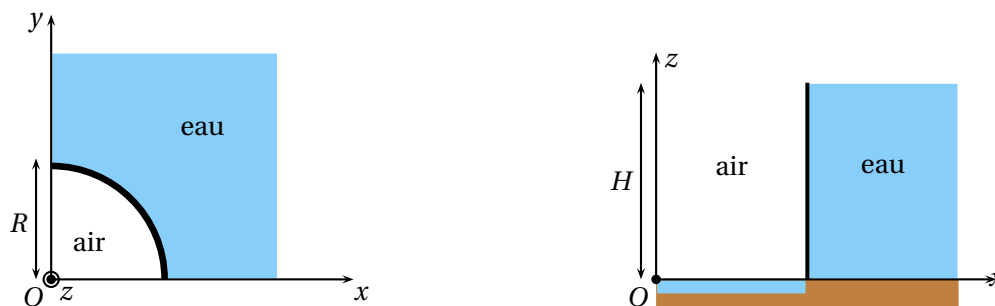


FIGURE III-1 – Barrage-voûte en vue de dessus (à gauche), et en vue de coupe (à droite)

1. À l'aide d'arguments de symétrie, déterminer la direction de la résultante  $\vec{F} = \vec{F}_{\text{air}} + \vec{F}_{\text{eau}}$  des forces de pression qui s'exercent sur le barrage, puis représenter le sens de cette résultante sur un schéma en vue de dessus.
2. Exprimer la résultante  $\vec{F}_{\text{air}}$  des forces de pression exercées par l'air sur le barrage en fonction de  $R$ ,  $H$  et  $P_0$ .
3. En supposant que l'eau est un fluide incompressible, établir l'expression du champ de pression  $P(z)$  dans l'eau.
4. Exprimer la résultante  $\vec{F}_{\text{eau}}$  des forces de pression exercées par l'eau sur le barrage en fonction de  $R$ ,  $H$ ,  $P_0$ ,  $g$  et  $\rho_e$ .

5. En déduire que la norme de la résultante des forces de pression qui s'exercent sur le barrage est donnée par

$$F = \frac{R\rho_e g H^2}{\sqrt{2}}.$$

6. Calculer numériquement la norme de cette résultante pour le barrage de Jinping 1.

### Partie IV : Le conseil... (CCINP PSI 2024)

Le fort Boyard est une ancienne fortification militaire située au large des côtes de La Rochelle entre l'île d'Aix et l'île d'Oléron. La construction s'achève en 1857 avec pour objectif initial de défendre la rade contre les anglais. Vite devenu inutile, il est transformé en prison avant d'être abandonné. En 1990, il retrouve une utilité grâce à l'émission Fort Boyard que l'on ne présente plus.

Cette partie est en lien avec l'émission Fort Boyard.

Après avoir récupéré suffisamment de clés, les candidats se rendent au Conseil pour y affronter les Maîtres du temps dans plusieurs duels afin de récupérer un maximum de temps dans la salle du trésor. L'un de ces duels est baptisé l'aquarium (figure IV-1).

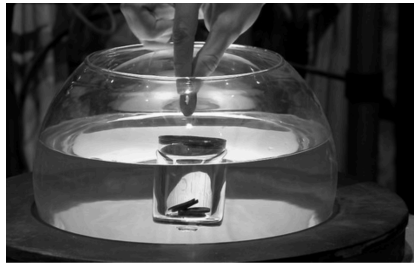


FIGURE IV-1 – Duel de l'aquarium

Dans ce duel, le candidat et le Maître du temps ajoutent chacun à leur tour un boyard (une pièce) dans un verre, initialement vide, flottant dans un aquarium. Le premier à faire couler le verre a perdu.

**On suppose que :**

- le bocal est suffisamment profond pour que le verre puisse couler intégralement;
- le verre reste au centre du bocal et ne touche jamais les bords;
- le verre, de masse  $M$ , est cylindrique de hauteur  $h$  et de base circulaire d'aire  $S$ ;
- le fond du verre reste toujours horizontal (il ne peut pas s'incliner comme sur la figure IV-1);
- les pièces ont une masse  $m$  et sont toutes horizontales, empilées les unes sur les autres au fond du verre, bien alignées (pas comme sur la figure IV-1).

Le système ainsi modélisé est représenté figure IV-2 (avec  $n = 3$  pièces).

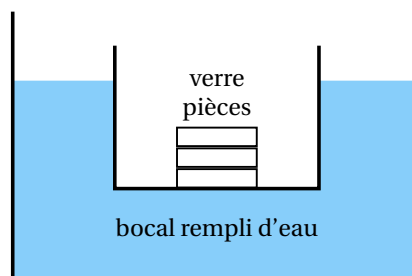


FIGURE IV-2 – Schéma du système avec trois pièces

**Données numériques :**

- masse du verre :  $M = 125$  g;
- surface de la base du verre :  $S = 2,0 \times 10^{-3}$  m<sup>2</sup>;
- hauteur du verre :  $h = 10$  cm;
- masse d'une pièce :  $m = 10$  g;
- épaisseur d'une pièce :  $e = 2,0$  mm;
- masse volumique de l'eau  $\mu = 1,0 \times 10^3$  kg · m<sup>-3</sup>.

1. Sachant que le Maître du temps joue en premier, qui remporte le duel? S'agissant d'une question de type « résolution de problème », un raisonnement détaillé et rigoureux est attendu. Tout élément de raisonnement correct, même partiel, sera récompensé.

2. Exprimer, puis calculer la variation d'altitude  $\Delta z$  du sommet de la pile de pièce **par rapport à la surface de l'eau** lors de l'ajout d'une pièce. Le sommet de la pile est-il monté ou descendu?

## Partie V : Traitement des effluents... (CCINP PSI 2022)

Dans l'industrie du cuir, des sels de chrome sont ajoutés aux bains de tannage pour rendre le cuir imputrescible. Ces sels ne réagissent que partiellement avec les peaux, 40 à 50 % du chrome n'est pas absorbé. Le chrome VI est classé cancérigène pour l'homme, mais uniquement lors d'une exposition par inhalation.

Les effluents doivent être traités de façon à respecter les normes de rejets en vigueur avant d'être rejetés. On se propose ici d'étudier certains aspects chimiques liés au fonctionnement d'une station d'épuration.

### 1 Déchromation

La figure V-1 correspond au diagramme  $E$ -pH du chrome, tracé pour une concentration totale en élément chrome dissous de  $10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ . Les espèces prises en compte sont  $\text{Cr}(s)$ ,  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ ,  $\text{Cr}^{2+}$ ,  $\text{Cr}^{3+}$ ,  $\text{Cr}(\text{OH})_3(s)$  et  $\text{CrO}_4^{2-}$ .

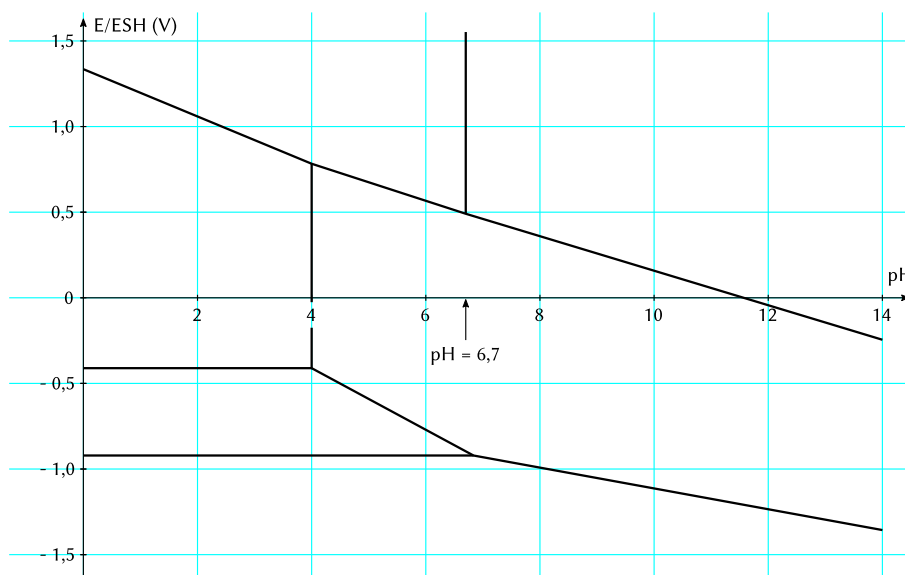


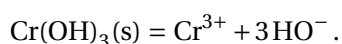
FIGURE V-1 – Diagramme  $E$ -pH du chrome

1. Déterminer le nombre d'oxydation du chrome dans chacune des six espèces.

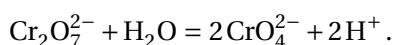
Montrer que le couple  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-} / \text{CrO}_4^{2-}$  forme un couple acido-basique. Préciser lequel est l'acide et lequel est la base.

Reproduire sur votre copie l'allure du diagramme  $E$ -pH de la figure V-1 en associant un domaine à chacune des six espèces.

2. Quel est le pH de début de précipitation de l'hydroxyde de chrome III? En déduire le produit de solubilité de l'hydroxyde de chrome III, qui correspond à la constante d'équilibre  $K_s$  de la réaction



3. On considère la réaction chimie de constante d'équilibre  $K_1$  :



On rappelle que sur la frontière qui sépare deux espèces dissoutes, il y a autant d'élément chrome dans chacune des deux espèces.

Déterminer, à l'aide du diagramme  $E$ -pH du chrome, la valeur numérique  $\text{p}K_1 = -\log K_1$  de cette constante d'équilibre.

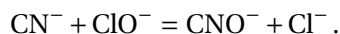
4. Lors de la déchromation, les ions  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$  sont réduits en milieu acide en ions  $\text{Cr}^{3+}$  par les ions  $\text{HSO}_3^-$  qui s'oxydent en ions  $\text{SO}_4^{2-}$ .

Écrire la réaction chimique qui correspond à la réduction d'une mole de  $\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}$ .

Déterminer la valeur numérique de la constante d'équilibre  $K_2$  associée à cette réaction. Conclure.

## 2 Décyanuration

Les ions cyanures  $\text{CN}^-$  des eaux polluées sont éliminés par oxydation, en milieu fortement basique, en ions  $\text{CNO}^-$ , à l'aide d'un excès d'eau de javel suivant la réaction



L'eau de javel sera ici assimilée à une solution équimolaire d'ions  $\text{Cl}^-$  et d'ions  $\text{ClO}^-$ . La figure V-2 correspond au diagramme  $E$ -pH du chlore, tracé pour une concentration totale en élément chlore dissous de  $10^{-1} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ .

On considère  $\text{Cl}^-$  (aq),  $\text{HClO}$  (aq),  $\text{ClO}^-$  (aq) et  $\text{Cl}_2$  (g). Sur une frontière, on prendra la pression partielle d'une espèce gazeuse égale à 1 bar.

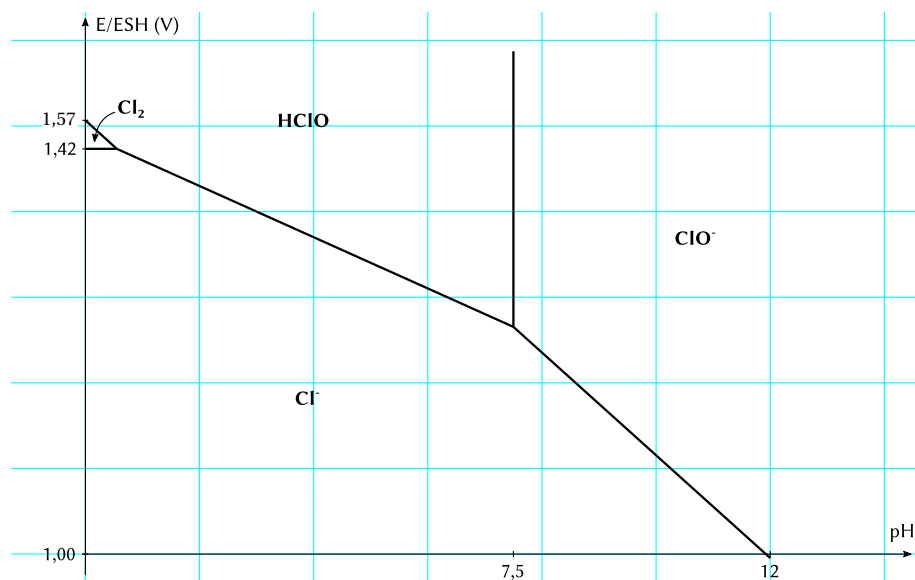


FIGURE V-2 – Diagramme  $E$ -pH du chlore

5. Justifier qualitativement à l'aide des diagrammes  $E$ -pH que cette réaction est quasi-totale.

Le dichlore est un gaz très toxique, voire mortel.

6. Pourquoi est-il déconseillé d'utiliser de l'eau de javel en milieu trop acide? Écrire l'équation chimique qui se produit lorsque l'on acidifie trop fortement une solution d'eau de javel.

7. Déterminer le  $\text{p}K_a$  du couple acide-base  $\text{HClO}/\text{ClO}^-$ .

On donne  $E^\circ(\text{ClO}^-/\text{Cl}^-) = 1,73 \text{ V}$ . En déduire le potentiel standard du couple  $\text{HClO}/\text{Cl}^-$ .

8. Qu'arrive-t-il à  $\text{Cl}_2$  quand le pH augmente? Écrire l'équation-bilan de la réaction (R) correspondante et donner son nom.

Quelle grandeur permet de déterminer le sens d'évolution d'un système réactif?

Déterminer le sens d'évolution de la réaction (R) en fonction du pH, et montrer que  $\text{Cl}_2$  ne peut pas exister pour un pH supérieur à une valeur que l'on calculera.

### Données

Potentiels standard d'oxydoréduction à 298 K :

$$E^\circ(\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}) = 1,33 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{SO}_4^{2-}/\text{HSO}_3^-) = 0,17 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{CNO}^-/\text{CN}^-) = -0,13 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{Cl}_2/\text{Cl}^-) = 1,36 \text{ V}$$