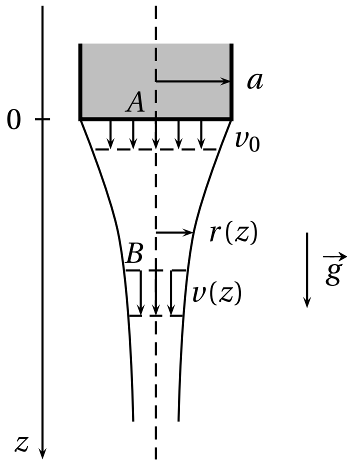
TD bilans — Relation de Bernoulli

1 — Rétrécissement d'un jet liquide

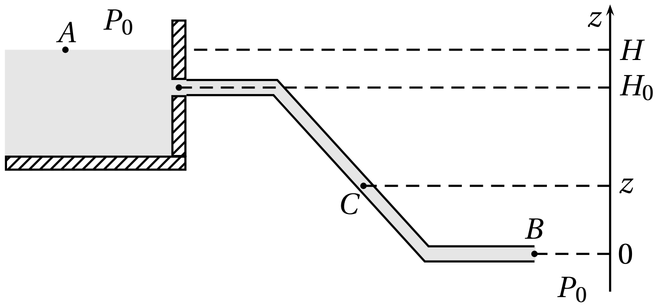
On propose d'étudier un jet liquide sortant d'un orifice circulaire de rayon a, à la vitesse v_0 correspondant à un débit volumique Q. Le liquide, de masse volumique μ est considéré comme parfait. On néglige tout phénomène de tension superficielle à la surface du libre. Le jet présente une symétrie de révolution par rapport à l'axe vertical en tirets représenté sur la figure ci-contre. L'air environnant le jet liquide est à la pression uniforme P_0.



En un point M de l'écoulement, on utilise la base locale des coordonnées cylindriques. On suppose que l'écoulement est quasi-unidimensionnel avec un champ eulérien des vitesses est de la forme : $\vec{v}(M,t) = v(z)\vec{e}_z$.
Déterminer l'expression du rayon du jet $r(z)$.

2 — Phénomène de cavitation

Une conduite de diamètre $D = 30$ cm et de longueur $L = 200$ m amène l'eau d'un barrage vers la turbine d'une centrale. Le barrage a une grande capacité, si bien que l'on peut considérer que le niveau de la surface libre est constant, à la cote $H = 160$ m. Le départ de la conduite est situé à $H_0 = 140$ m.
La pression atmosphérique est $P_0 = 10^5$ Pa, la masse volumique de l'eau $\rho = 10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et le champ de pesanteur $g = 10\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.
L'extrémité aval de la conduite est à l'air libre.
On donne $H_0 = 140$ m et $H = 160$ m.

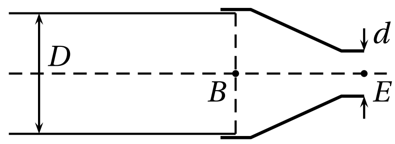


1. Exprimer la vitesse de sortie en fonction de g et H, et calculer sa valeur. Calculer le débit volumique.

2. Exprimer la pression $P(z)$ en un point de cote z de la conduite.

Déterminer la cote z des points pour lesquels se produit le phénomène de cavitation dans la conduite (la pression devient inférieure à la pression de vapeur saturante de l'eau $P_{sat} = 2300$ Pa à 20 °C).

3. Pour remédier à ce problème (pouvant provoquer la rupture de la conduite), on visse à l'extrémité aval une tubulure de section décroissante (injecteur), de diamètre de sortie $d < D$, avec $d = 15$ cm.

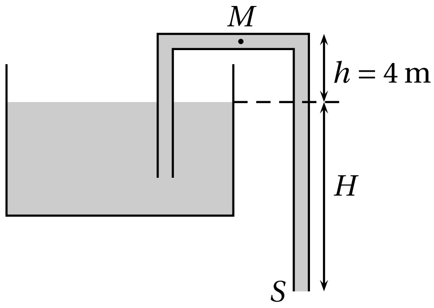


3.a) Calculer le nouveau débit volumique.

3.b) Montrer que le phénomène de cavitation ne se produira plus dans la conduite.

3 — Débit d'un siphon

Suite à de violents orages, une fondation étanche de grandes dimensions s'est remplie d'eau (fluide incompressible de masse volumique $\mu = 1000\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$). Celle-ci peut être vidée à l'aide d'un siphon constitué d'une conduite de 10 cm de diamètre qui s'élève à 4 m au-dessus de la surface libre du réservoir ouvert à l'atmosphère. On souhaite déterminer la cote H de la sortie du siphon pour obtenir le débit maximal. On négligera les pertes de charge.



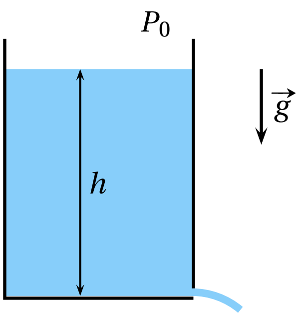
1. Donner l'expression de la vitesse moyenne du fluide en S, extrémité du siphon débouchant dans l'atmosphère, en fonction de H.

2. Donner l'expression de la pression p_M au point M en fonction de la pression atmosphérique P_0, H et h. La hauteur H peut-elle prendre d'importe quelle valeur ?

3. Quel débit maximal peut-on obtenir ? Quelle doit être alors la cote de la sortie du siphon ?

4 — Relation de Torricelli

On considère la vidange d'un récipient de section S percé en son fond d'un orifice de section $\sigma \ll S$.



1. En considérant un point A à la surface libre et un point B à la sortie de l'orifice, comparer v_A et la vitesse v du fluide en B. Quelle hypothèse permet de considérer l'écoulement comme stationnaire ?

2. En appliquant la relation de Bernoulli, obtenir l'expression de v en fonction de h (relation de Torricelli).

3. Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}$ en fonction de de v, puis de $h(t)$.

4. En déduire la durée T du la vidange du récipient en fonction de h.

5 — Vidange

Le fond d'un réservoir de section variable

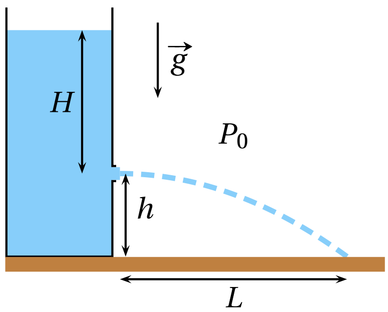
$$S(z) = S_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\alpha}$$

est percé d'un petit trou.

Calculer le temps T de vidange entre les altitudes z_1 et z_2.
Quelle valeur de α choisir pour que T soit une fonction linéaire de $z_2 - z_1$?

6 — Contracté du jet

On considère le dispositif suivant : un récipient, rempli d'eau, est muni d'un orifice de section σ, situé à une hauteur H en dessous du niveau d'eau dans le récipient (le niveau étant maintenu constant).
On place le récipient au-dessus d'une plateforme horizontale, ce qui permet de mesurer la position du point d'impact du jet sur cette dernière, l'orifice de sortie étant à une distance h au-dessus de la plateforme.
On note P_0 la pression atmosphérique et $\vec{g}$ le champ de pesanteur terrestre.



1. Rappeler les conditions d'application de la relation de Bernoulli. En déduire l'expression de la vitesse v du fluide au niveau de l'orifice en fonction des données.
Application numérique pour $H = 1{,}0$ m.

2. En supposant que chaque particule de fluide suit la même trajectoire qu'une masse ponctuelle lancée avec la même vitesse horizontale $\vec{v}$ de l'orifice, exprimer la distance d'impact du jet L en fonction des données.
Pour $h = 0{,}5$ m, on mesure $L = 1{,}4$ m. Est-ce compatible avec le résultat précédent ?

3. Dans une seconde expérience, on détermine le débit volumique du jet sortant de façon directe : on mesure le temps T mis pour remplir un récipient de volume V ; on en déduit une estimation v' de la vitesse de l'eau à la sortie de l'orifice.
On met une durée $T = 27$ s à remplir un récipient de volume $V = 10$ L. L'orifice de sortie étant circulaire, de diamètre $d = 1{,}5$ cm, en déduire la vitesse v' du fluide à la sortie du récipient.

4. La valeur v' trouvée est-elle compatible avec la valeur v trouvée pécédemment ? Proposer une explication.