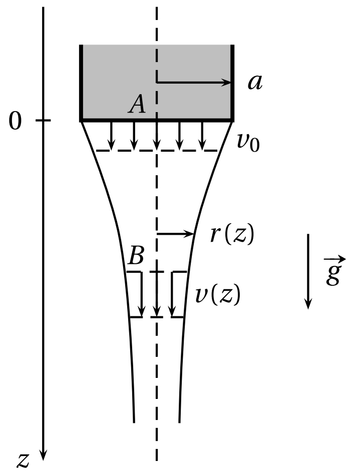
TD bilans — Relation de Bernoulli — solution

1 — Rétrécissement d'un jet liquide



On considère un écoulement stationnaire d'un fluide parfait incompressible dans le champ de pesanteur : on peut donc appliquer le théorème de Bernoulli entre les points A et B sur une même ligne de courant.
L'axe Oz étant descendant, il faut écrire

$$\frac{P(A)}{\mu}+\frac{v_0^2}{2}+0=\frac{P(B)}{\mu}+\frac{v^2(z)}{2}-gz.$$

Le jet étant libre, on a $P(A)=P(B)=P_0$, d'où

$$v^2(z)=v_0^2+2gz,$$

soit

$$v(z)=v_0\sqrt{1+\frac{2gz}{v_0^2}}.$$

La conservation du débit volumique entre la sortie et la cote z s'écrit

$$Q=\pi a^2 v_0=\pi r^2(z)\,v(z).$$

On en déduit

$$\boxed{r(z)=\frac{a}{\left(1+\frac{2gz}{v_0^2}\right)^{1/4}}}.$$

2 — Phénomène de cavitation

1. On applique la relation de Bernoulli sur la ligne de courant joignant les points A et B :

$$P(A)+\rho g z_A+\frac{1}{2}\rho v_A^2=P(B)+\rho g z_B+\frac{1}{2}\rho v_B^2.$$

À la surface libre, on a $P(A)=P_0$. Le point B étant dans un jet libre, $P(B)=P_0$. La hauteur d'eau étant constante, on a $v_A=0$. Avec $z_A=H$ et $z_B=0$, on en déduit la vitesse $v=v_B$ de sortie :

$$\boxed{v=\sqrt{2gH}}.$$

On calcule $\boxed{v=56{,}6\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}}$.
Le débit volumique vaut

$$D_\mathrm{v}=\pi\frac{D^2}{4}v.$$

On calcule $D_\mathrm{v}=4{,}0\ \mathrm{m^3\cdot s^{-1}}=4000\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}$.

2. On applique la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant joignant les points A et C :

$$P_0+\rho g H=P(z)+\frac{1}{2}\rho v_C^2+\rho g z.$$

La section de la conduite étant identique en B et en C, on en déduit

$$v_C^2=v_B^2=2gH,$$

d'où

$$\boxed{P(z)=P_0-\rho g z}.$$

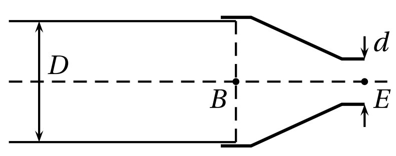
La pression décroît quand on s'élève dans la conduite. Le phénomène de cavitation se produit pour

$$P(z_\mathrm{c})=P_0-\rho g z_\mathrm{c}=P_\mathrm{sat},$$

soit pour

$$\boxed{z_\mathrm{c}=\frac{P_0-P_\mathrm{sat}}{\rho g}=9{,}8\ \mathrm{m}}.$$

3. Pour remédier à ce problème (pouvant provoquer la rupture de la conduite), on visse à l'extrémité aval une tubulure de section décroissante (injecteur), de diamètre de sortie $d<D$, avec $d=15$ cm.



3.a) Le point E étant au niveau de la sortie, donc d'un jet libre, l'application de la relation de Bernoulli le long de la ligne de courant joignant les points A et E conduit de même à

$$v_E=\sqrt{2gH}.$$

Le débit volumique s'écrit

$$D_\mathrm{v}=\pi\frac{d^2}{4}v_E=1{,}0\ \mathrm{m^3\cdot s^{-1}}.$$

3.b) La conservation du débit volumique entre les sections B et E donne $v_C D^2 = v_B D^2 = v_E d^2$, d'où

$$v_C = \left(\frac{d}{D}\right)^2 \sqrt{2gH}.$$

La relation de Bernoulli appliqué le long de la ligne de courant joignant les points A et C s'écrit alors

$$\begin{aligned}P_0 + \rho g H &= P(z) + \frac{1}{2}\rho v_C^2 + \rho g z \\ &= P(z) + \rho g H \left(\frac{d}{D}\right)^4 + \rho g z\end{aligned}$$

d'où

$$P(z) = P_0 - \rho g z + \rho g H \left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right).$$

La pression vaut P_{sat} à l'altitude

$$z_{\text{sat}} = \frac{P_0 - P_{\text{sat}}}{\rho g} + H\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) = 160\ \text{m},$$

hauteur inaccessible dans la conduite. L'embout a permis débiter la cavitation en réduisant la vitesse dans la conduite.

---

3 — Débit d'un siphon

1. On écrit la relation de Bernoulli entre un point de la surface libre et un point du jet libre de sortie :

$$\frac{P_0}{\mu} + 0 + 0 = \frac{P_0}{\mu} - gH + \frac{v^2}{2}$$

d'où

$$\boxed{v = \sqrt{2gH}}.$$

2. La vitesse v est constante dans la conduite de section constante (conservation du débit volumique de l'eau incompressible) ; la relation de Bernoulli entre le point M et un point du jet de sortie s'écrit

$$\frac{P(M)}{\mu} + gh + \frac{v^2}{2} = \frac{P_0}{2} - gH + \frac{v^2}{2},$$

d'où

$$\boxed{P(M) = P_0 - \mu g(H+h)}.$$

On doit avoir $P(M) > 0$, d'où

$$\boxed{H < \frac{P_0}{\mu g} - h}.$$

➤ Rigoureusement, on devrait écrire $P(M) > P_{\text{sat}}$, mais $P_{\text{sat}} \ll P_0$ d'où l'approximation effectuée.

3. La vitesse maximale est obtenue pour

$$H_{\max} = \frac{P_0}{\mu g} - h,$$

soit

$$v_{\max} = \sqrt{2\left(\frac{P_0}{\mu} - gh\right)}$$

Le débit maximal correspondant est

$$\boxed{D.\max = \frac{\pi D^2}{4}\sqrt{2\left(\frac{P_0}{\mu} - gh\right)}}.$$

On calcule

$$\boxed{D_{\max} = 8{,}7 \times 10^{-2}\ \text{m}^3\cdot\text{s}^{-1} = 87\ \text{L}\cdot\text{s}^{-1}}.$$

La cote de la sortie du siphon vaut alors

$$\boxed{H_{\max} = 6{,}2\ \text{m}}.$$

---

5 — Vidange

On note Oz la verticale ascendente.
On considère en première approximation l'écoulement comme stationnaire en négligeant la vitesse des points de la surface libre, en supposant $S_0 \gg \sigma$. La relation de Bernoulli entre un point de la surface libre et un point du jet libre en sortie s'écrit alors

$$\frac{P_0}{\mu} + 0 + gz = \frac{P_0}{\mu} + \frac{v^2}{2} + 0$$

d'où la vitesse de sortie

$$\boxed{v = \sqrt{2gz}}.$$

Dans un second temps, nous allons prendre en compte la vitesse $-\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ des points de la surface libre pour écrire la conservation du débit volumique (liquide incompressible) entre la surface libre et l'orifice de sortie :

$$D_{\text{v}} = -S(z)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \sigma v$$

d'où

$$z^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}z = -\frac{\sigma}{S_0}\sqrt{2g}\,z_0^\alpha\,\mathrm{d}t.$$

Le temps de vidange entre les altitudes z_1 et $z_2 < z_1$ vérifie alors

$$\int_{z_1}^{z_2} z^{\alpha-1/2}\,\mathrm{d}z = -\frac{\sigma}{S_0}\sqrt{2g}\,z_0^\alpha T,$$

soit

$$\left[\frac{z^{\alpha+1/2}}{\alpha+1/2}\right]_{z_1}^{z_2} = -\frac{\sigma}{S_0}\sqrt{2g}\,z_0^\alpha T.$$

On a alors

$$\boxed{T = \frac{S_0}{\sigma}\sqrt{\frac{2}{g}}\frac{1}{(1+2\alpha)z_0^\alpha}\left[z_1^{\alpha+1/2} - z_2^{\alpha+1/2}\right]}.$$

On a alors

$$\boxed{T = K(z_1 - z_2) \quad \text{pour} \quad \alpha = \frac{1}{2}},$$

avec $K = \dfrac{S_0}{\sigma}\sqrt{\dfrac{2}{g}}\dfrac{1}{(1+2\alpha)z_0^\alpha}$.

➤ On peut répondre directement à la deuxième question avec moins de calculs, à partir de la relation issue de la conservation du débit volumique

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -\frac{\sigma}{S_0}\frac{\sqrt{2g}}{z_0^\alpha} z^{1/2-\alpha}.$$

Il faut $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ = cte pour avec une hauteur variant de façon affine avec le temps, soit $\alpha = 1/2$ pour que la dérivée précédente ne dépende plus de z.

6 — Contracté du jet

1. La relation de Bernoulli s'applique pour un écoulement parfait, stationnaire, incompressible et homgène. On considère une ligne de courant entre la surface libre et l'orifice de sortie (jet libre à la pression P_0). On obtient la formule de Torricelli $\boxed{v = \sqrt{2gH}}$.

Pour $H = 1{,}0\,\mathrm{m}$, on a $v = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 1}$ soit $\boxed{v = 4{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

2. Trajectoire balistique, correspondant à $\vec{a} = \vec{g}$. Base Ox vers la droite, Oy ascendant, origine en bas à droite du récipient.

On a $\ddot{x} = 0$, soit $\dot{x} = v$ et $x(t) = vt$. D'autre part $\ddot{y} = -g$, soit $\dot{y} = -gt$ et $y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + h$ (vitesse initiale horizontale).

On élimine le temps, d'où $y(x) = -\dfrac{g}{2v^2}x^2 + h$. On a $y(L) = 0$, d'où $\boxed{L = v\sqrt{\dfrac{2h}{g}}}$.

On calcule la vitesse correspondant à la mesure :

$$v = L\sqrt{\frac{g}{2h}} = 4{,}4\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

On retrouve bien la vitesse obtenue précédemment.

3. Le débit volumique est $Q = v'\sigma = \dfrac{V}{T}$, d'où $v' = \dfrac{V}{\sigma T}$.

Avec $\sigma = \pi\dfrac{d^2}{4}$, on a $\boxed{v' = \dfrac{4V}{\pi d^2 T}}$.

On calcule $v' = \frac{4 \times 10 \times 10^{-3}}{\pi \times (1{,}5 \times 10^{-2})^2 \times 27}$, soit $\boxed{v' = 2{,}1\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

4. v' est la vitesse au niveau de l'orifice de sortie, tandis que v est la vitesse dans le jet libre (pression P_0). On a $v > v'$ si la section σ_ℓ du jet libre est plus petite que la section σ de l'orifice : on observe en effet une contraction du jet au niveau de la sortie. La conservation du débit volumique donne le coefficient de contraction du jet :

$$\alpha = \frac{\sigma_\ell}{\sigma} = \frac{v'}{v} = 0{,}48.$$