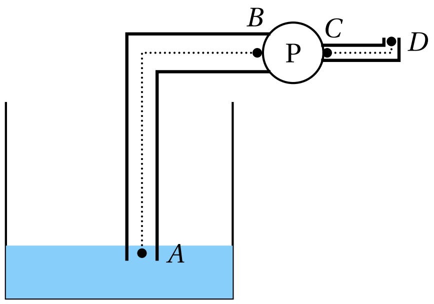
TD bilans — Bilans dynamiques

1 — Pompe

On considère un bloc pompe P qui puise de l'eau au fond d'un puits de profondeur $h = 5$ m.
La section du tuyau AB fait 100 cm^2, celle du tuyau CD fait 10 cm^2.
La pression atmosphérique est de 1 bar, la pression de vapeur saturante de l'eau à 20 °C est de 2,3 kPa.
Le débit volumique est $D_\mathrm{v} = 10\ \mathrm{L\cdot s^{-1}}$.



1. Quelles hypothèses peut-on faire sur l'écoulement ?

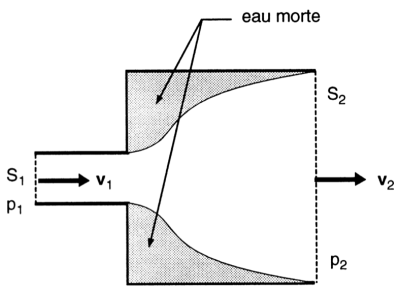
2. Quelle est la vitesse du fluide en A ?

3. Que vaut la pression en B ? Y a-t-il un risque de cavitation ?

4. Quelle est la puissance de la pompe ?

5. Quelle altitude maximale pourra atteindre le jet d'eau ?

2 — Perte de charge singulière



On considère un écoulement stationnaire incompressible d'un fluide dans une conduite d'entrée de section droite d'aire S_1, de vitesse v_1, la pression ayant une valeur P_1 (pression amont). La conduite s'évase brutalement, l'aire de la section droite devenant $S_2 > S_1$. Il se produit alors un « décollement » des lignes de courant avec la création d'une zone d'eau morte où se produit en regard de la zone d'écoulement un régime turbulent. Le fluide stagnant est supposé rester à la pression P_1.
À un certain niveau, les lignes de courant les plus éloignées de l'axe rejoignent à nouveau la paroi de la conduite. La vitesse du fluide (vitesse de sortie) est alors v_2 et la pression P_2 (pression aval).

1. Effectuer le bilan des forces exercées sur le fluide contenu entre les plans d'entrée et de sortie.

2. Exprimer le débit massique D_m à l'entrée et à la sortie.

3. En effectuant un bilan de quantité de mouvement, montrer que $D_\mathrm{m}(v_2 - v_1) = S_2(P_1 - P_2)$.

4. Établir la relation

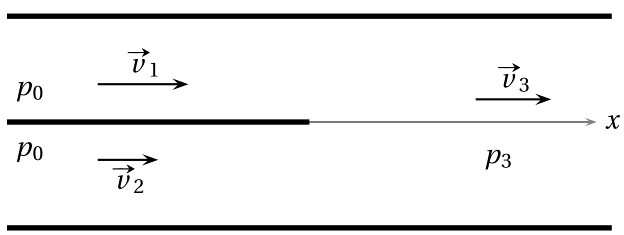
$$\frac{P_2}{\mu} = \frac{P_1}{\mu} + \frac{v_1^2 - v_2^2 - (v_2 - v_1)^2}{2},$$

où ρ est la masse volumique du fluide.
Comparer ce résultat à celui qu'on aurait obtenu en appliquant le théorème de Bernoulli. Expliquer pourquoi ce théorème n'est pas applicable dans le cas considéré.

5. Montrer que l'élargissement brusque a provoqué une « perte de charge » $\Delta P = \frac{\mu}{2}(v_2 - v_1)^2$ concernant la variation de pression $P_1 - P_2$.
Exprimer ΔP sous la forme $\Delta P = \alpha\frac{1}{2}\mu v_1^2$, où $\alpha < 1$ sera calculé en fonction du rapport $\frac{S_1}{S_2}$.

3 — Homogénéisation d'un écoulement

Une canalisation cylindrique d'axe horizontal $x'x$ et de section S est partagé jusqu'en $x = 0$ en deux canalisations de section $S/2$ dans lesquelles un même fluide de masse volumique μ s'écoule avec des vitesses uniformes et stationnaires $\vec{v}_1 = v_0\vec{e}_x$ et $\vec{v}_2 = v_0/2\,\vec{e}_x$. Les deux écoulements se rejoignent en $x = 0$. Suffisamment loin de $x = 0$, l'écoulement est uniforme et stationnaire de vitesse $\vec{v}_3 = v_3\vec{e}_x$. On note P_0 la valeur commune de la pression dans les écoulements (1) et (2) et P_3 la pression dans l'écoulement (3).

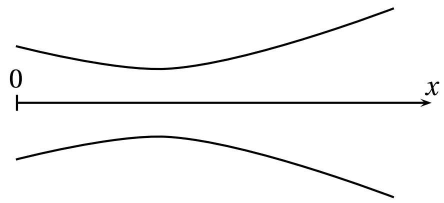


1. Quel phénomène physique est à l'origine de l'homogénéisation des vitesses dans la conduite (3) ?

2. En considérant un système fermé associé au système ouvert $(\mathcal{S})$ constitué à l'instant t du fluide contenu entre une section d'entrée d'abscisse $x_1 = x_2 < 0$ où l'écoulement est homogène et une section de sortie d'abscisse $x_3 > 0$ où l'écoulement est homogène, établir les expressions de v_3 et p_3 en fonction de v_0, P_0 et μ.

3. En faisant un bilan énergétique pour le même système fermé, établir l'expression de la puissance des forces intérieures. Commenter.

4 — Tuyère de Laval



On considère un écoulement permanent d'air, assimilé à un gaz parfait, à travers une tuyère horizontale, de révolution autour de l'axe Ox, de section $S(x)$ non constante. La tuyère est calorifugée et l'écoulement est supposé unidimensionnel : $\vec{v}(x) = v(x)\vec{e}_x$. À l'entrée de la tuyère (en $x = 0$), on note T_0, P_0, μ_0 et v_0 la température, la pression, la masse volumique et la vitesse du fluide. On pose $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ supposé constant. Le fluide est supposé parfait. Il subit une transformation isentropique au cours de son passage dans la tuyère.

1. Établir l'équation, dite « équation de Saint-Venant » :

$$v^2(x) = v_0^2 + \frac{2\gamma}{\gamma-1}\frac{P_0}{\mu_0}\left[1-\left(\frac{P_0}{P(x)}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}\right].$$

2. Établir la relation, dite « équation d'Hugoniot » :

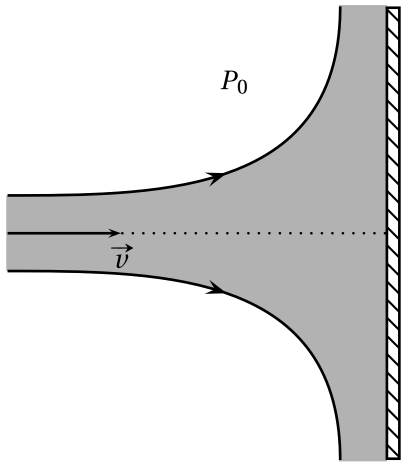
$$\frac{1}{S(x)}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = \left(M^2(x)-1\right)\frac{1}{v(x)}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x},$$

où $M(x) = \frac{v(x)}{c(x)}$, avec $c(x) = \sqrt{\gamma\frac{P(x)}{\mu(x)}}$ est la vitesse du son dans le fluide à l'abscisse x. $M(x)$ est appelé « nombre de Mach ».

3. On souhaite que l'écoulement soit subsonique à l'entrée de la tuyère et supersonique à la sortie. Comment doit varier la section $S(x)$ pour que la vitesse augmente avec x ?

5 — Action d'un jet sur une plaque

Un jet d'eau, de section circulaire S, arrive en incidence normale sur une plaque fixe en forme de disque de rayon R. Le jet change de géométrie à l'impact avec la plaque : il possède une symétrie de révolution autour de l'axe indiqué en pointillés sur la figure. L'eau, de masse volumique μ, à une vitesse $\vec{v}$ uniforme dans toute section droite du jet située assez loin en amont du point d'impact. La pression ambiante est notée P_0 L'écoulement est supposé permanent dans le référentiel d'étude. La pesanteur est négligée et l'eau est considérée comme un fluide parfait.



Déterminer l'action exercée par le jet sur la plaque.

6 — Décollage d'une fusée

Une fusée a un masse $m_0 = 200$ kg à vide. La masse initiale de carburant est $m_c = 100$ kg. La vitesse d'éjection des gaz est $u = 100\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et le débit massique est noté Q.

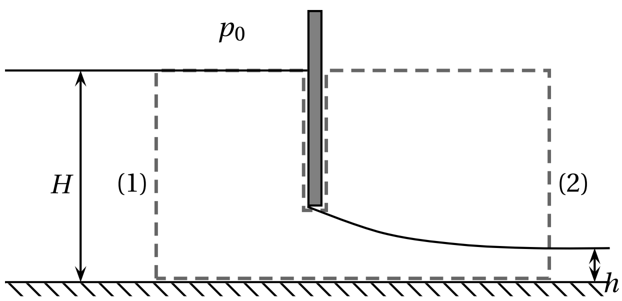
1. Calculer la force de poussée exercée par les gaz sur la fusée.

2. Calculer la valeur théorique minimale de Q pour que la fusée décolle (la valeur réelle est $1{,}2Q$).

3. Calculer la vitesse maximale atteinte par la fusée en fonction de m_0, m_c, Q, g et u.

7 — Effort sur un radier

Un radier[1] a une section rectangulaire de hauteur H et de largeur L. Il se termine par un tremplin de restitution à l'air libre de même largeur et de hauteur h. On note v_1 la vitesse moyenne dans la section (1) et v_2 la vitesse moyenne dans la section (2).
En considérant le volume de contrôle indiqué sur la figure, calculer l'effort exercé sur le radier.



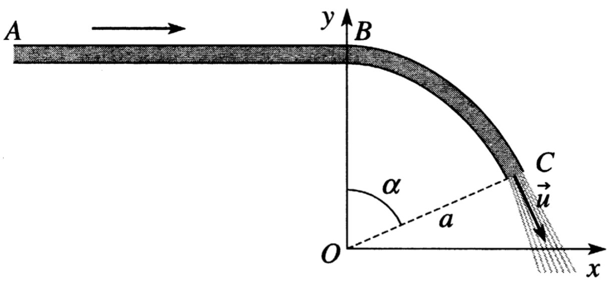
Application numérique :

- la vitesse moyenne dans la section (1) est $v_1 = 0{,}15\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$;
- on donne $L = 1$ m, $H = 80$ cm et $h = 3$ cm.

1. Dans la construction fluviale, le radier est une plate-forme maçonnée sur laquelle est édifiée un ouvrage hydraulique (pont, barrage…) pour lutter contre l'érosion de l'eau. Les pour barrages, les seuils ou les écluses, le radier sert d'assise indéformable.

8 — Force sur un tuyau coudé

De l'eau de masse volumique ρ s'écoule avec un débit massique D_m dans un tuyau horizontal, rigide, de section constante S. Le tuyau est coudé, la direction moyenne subissant une rotation d'angle α. On néglige la pesanteur. La face extérieure du tuyau est dans l'atmosphère de pression P_0 ; en B, la pression est $P_1 > P_0$. La perte de charge est donnée par $P_1 - P_0 = KD_m$.

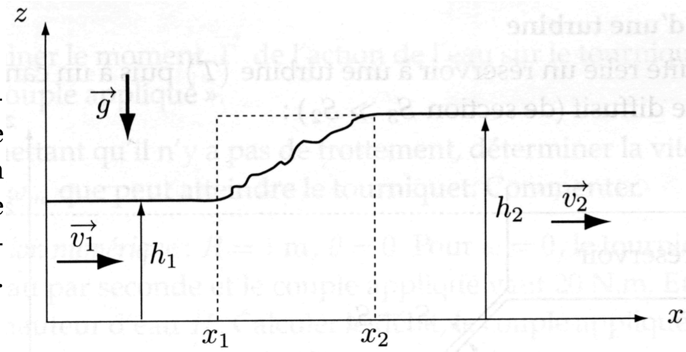


Déterminer la force exercée par l'eau sur le tuyau, en fonction de D_m, ρ, P_0, S, α et K.

---

9 — Ressaut hydraulique

On modélise un ressaut dans un écoulement unidimensionnel et permanent dans un canal rectiligne parallèle à l'axe Ox et de largeur L selon Oy. En amont (respectivement en aval) du ressaut, la vitesse du fluide vaut uniformément $v_1 \vec{e}_x$ (resp. $v_2 \vec{e}_x$) et la profondeur est h_1 (resp. h_2). Le liquide est considéré comme incompressible, de masse volumique μ. La pression de l'atmosphère au-dessus du liquide est P_0. L'axe Oz est vertical ascendant.
Pour étudier ce phénomène, on considère le fluide contenu dans le parallélépipède rectangle de section $S = Lh_2$ limité par les sections d'abscisses x_1 et x_2 situées de part et d'autre du ressaut.



1. Peut-on déduire v_2 et h_2 du théorème de Bernoulli ? Pourquoi ?

2. Exprimer la pression au sein du liquide en fonction de z sur la face d'entrée et sur la face de sortie. On choisira l'origine des cotes z au fond du canal.

3. Établir un bilan de quantité de mouvement pour le fluide contenu dans le volume considéré. En déduire une relation entre v_1, h_1, v_2 et h_2.

4. Calculer v_1 et v_2 en fonction de h_1, h_2 et g.

5. Exprimer, en fonction de h_1 et de h_2, la puissance dissipée dans le ressaut.

---

10 — Tourniquet hydraulique

Un tourniquet hydraulique est forme de deux branches de rayon R, éjectant chacune, à une vitesse relative u orthoradiale vers l'arrière, de l'eau avec un débit massique $D/2$. Il est alimenté par une canalisation verticale amenant le débit totale D.
La liaison entre la canalisation d'amenée et le tourniquet est supposée sans frottement et sans fuite.
On note J le moment d'inertie du tourniquet rempli de fluide par rapport à son axe.

1. On suppose le régime permanent atteint. Quelle est la vitesse de rotation ω du tourniquet ?

2. Que devient cette vitesse de rotation si on suppose le tourniquet soumis à un couple de frottement fluide $\Gamma = -\lambda\omega$?

3. Étudier le régime transitoire, en établissant la loi $\omega(t)$, avec $\omega(0) = 0$.