# Méthode et physique — Analyse dimensionnelle

## 1 — Dimension d'une grandeur physique

La dimension d'une grandeur représente sa nature physique : une grandeur peut avoir la dimension d'une longueur, d'une surface, d'une énergie, d'une masse...
La notion de dimension est générale et ne suppose aucun choix particulier d'unité : une longueur peut s'exprimer en mètres, en pouces, en angströms, etc.

On dit que $n$ grandeurs $G_1, \cdots, G_i, \cdots, G_n$ sont dimensionnellement liées si l'on peut trouver $n$ nombres sans dimension $a_i$ et un nombre sans dimension $k$ tels que :

$$kG_1^{a_1} G_2^{a_2} G_3^{a_3} G_4^{a_4} G_5^{a_5} G_6^{a_6} G_7^{a_7} = k \prod_{i=1}^{7} G_i^{a_i} = 1$$

Dans le cas contraire, les grandeurs sont dites dimensionnellement indépendantes.

➤ Une vitesse $v$, une longueur $a$ et une durée $\tau$ ne sont pas dimensionnellement indépendantes, car on peut écrire $v = ka/\tau$, soit $ka\tau^{-1} v^{-1} = 1$.

Toute grandeur physique $G$ peut s'écrire comme un monôme, produit d'au plus 7 grandeurs dimensionnellement indépendantes :

$$G = G_1^{a_1} G_2^{a_2} G_3^{a_3} G_4^{a_4} G_5^{a_5} G_6^{a_6} G_7^{a_7} = \prod_{i=1}^{7} G_i^{a_i}$$

Le système international est basé sur un choix particulier des 7 grandeurs de base, dimensionnellement indépendantes :

| grandeur | symbole dimensionnel | unité SI | symbole de l'unité |
|---|---|---|---|
| masse | $M$ | kilograme | kg |
| longueur | $L$ | mètre | m |
| temps | $T$ | seconde | s |
| intensité électrique | $I$ | ampère | A |
| température | $\Theta$ | kelvin | K |
| intensité lumineuse | $J$ | candéla | cd |
| quantité de matière | $N$ | mole | mol |

➤ On dit « kelvin » et non « degré kelvin », et on note K, jamais $° \cdot$K.

➤ Si le nom de l'unité est tiré du nom d'une personne, ce nom ne prend pas de majuscule initiale, mais son symbole commence par une majuscule [1]

➤ Les grandeurs $M$, $L$ et $T$ permettent de décrire toutes les grandeurs de la mécanique.

➤ Les grandeurs $M$, $L$, $T$ et $I$ permettent de décrire toutes les grandeurs de l'électromagnétisme et de l'électricité.

La dimension d'une grandeur $G$ étant notée [a] $[G]$, l'**équation aux dimensions** de cette grandeur s'écrit :

$$[G] = M^{a_1} L^{a_2} T^{a_3} I^{a_4} \Theta^{a_5} J^{a_6} N^{a_7}$$

*a.* On peut aussi noter $\dim(G)$.

Si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, la grandeur $G$ est dite sans dimension, (ou adimensionnée) ; son équation aux dimensions s'écrit alors :

$$[G] = 1$$

➤ Ne pas confondre unité et dimension. Si $a$ est une longueur, on dira « $a$ est homogène à une longueur », ou « $a$ a la dimension d'une longueur ». Il est maladroit de dire « $a$ est homogène à des mètres ». En revanche, on dira que « dans le système international, $a$ s'exprime en mètres ».

1. On utilise usuellement la notation « L » pour litre, pour ne pas confondre la lettre l avec le chiffre 1.

## 2 — Règles de l'analyse dimensionnelle

On utilise les règles suivantes ($r$ est un nombre sans dimension) :

$$[G_1 G_2] = [G_1] \times [G_2] \,; \qquad [G^r] = [G]^r \,; \qquad \left[\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}X}\right] = \frac{[G]}{[x]} \,; \qquad \left[\frac{\mathrm{d}^n G}{\mathrm{d}x^n}\right] = \frac{[G]}{[x]^n}\,.$$

De plus :

L'argument des fonctions trigonométriques (cos, sin, tan), de la fonction exponentielle exp et de la fonction logarithme ln doit être sans dimension.

➤ Il en est donc de même pour les fonctions ch, sh, th, arcsin, arccos, arctan, argsh, argch, argth.

La règle suivante permet de vérifier l'homogénéité dune expression :

On ne peut additionner que des grandeurs ayant la même dimension.

On peut alors vérifier si une expression est homogène.

Une expression non homogène est nécessairement fausse.

➤ La réciproque est fausse : une expression homogène n'est pas forcément juste ! Cette vérification permet juste, parmi le vaste ensemble d'expressions fausses que vous êtes susceptibles d'établir, d'éliminer celles qui sont fausses car non homogènes. . .

### Les unités dérivées du système international

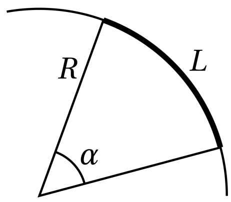
Les unités dérivées sont les unités du système international qui se déduisent des sept unités de base. On peut retrouver leur expression en fonction de unités de base à partir de relations connues mettant en jeu la grandeur cherchée. Quelques exemples :

| **Grandeur** | **Unité** | **Relation utilisée** | **Expression de l'unité en fonction des unités de base** |
|---|---|---|---|
| Énergie | joule (J) | $E_\mathrm{c} = \frac{1}{2} m v^2$ | $1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$ |
| Force | newton (N) | $F = ma$ | $1\ \mathrm{N} = 1\ \mathrm{kg \cdot m \cdot s^{-2}}$ |
| Pression | pascal (Pa) | $F = PS$ | $1\ \mathrm{Pa} = 1\ \mathrm{N \cdot m^2} = 1\ \mathrm{kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}}$ |

### Le radian, une unité sans dimension

Soient deux rayons d'un cercle de rayon $R$, qui interceptent sur ce dernier un arc de longueur $L$.
La mesure en radian de l'angle $\alpha$ entre ces deux rayons est définie par

$$\alpha = \frac{L}{R}\,,$$




c'est-à-dire par le rapport de deux longueurs.

Un angle est une grandeur sans dimension : $[\alpha] = 1$.

➤ Cette grandeur a cependant une unité, et sa valeur n'est pas la même en radians ou en en degrés.