# Fascicule d'exercices — Physique des ondes — équation de d'Alembert

## Autour de la corde vibrante

### 1 — Résonance sur une corde vibrante

On étudie les petits mouvements dans la direction $\vec{e}_z$ d'une corde métallique de longueur $L$, fixée en ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = L$. On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité $I = I_0 \cos\omega t$ et plongée dans un champ magnétique

$$\vec{B} = B_0 \sin\frac{\pi x}{L}\,\vec{e}_y.$$

On note $F$ la tension de la corde et $\mu$ sa masse linéique.

**1.** Montrer que le déplacement $z(x,t)$ d'un point de la corde est solution d'une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left(\frac{I_0 B_0}{\mu}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\omega t,$$

où $c$ est une constante à exprimer en fonction des données.

**2.** En régime sinusoïdal forcé, on cherche une solution de la forme $z(x,t) = C\sin\dfrac{\pi x}{L}\cos\omega t$.
Déterminer $C$ pour $\omega \neq \pi c/L$.
Que se passe-t-il lorsque $\omega$ tend vers $\pi c/L$ ?

### 2 — Corde vibrante

On considère une corde vibrante de masse linéique $\mu$, sans élasticité et sans torsion, se déformant faiblement au voisinage d'un axe $Ox$ : à l'ordre d'approximation considéré, le point $M$ qui a pour coordonnées $(x,0)$ au repos passe au point de coordonnées $(x, y(x,y))$. Le déplacement $y(x,t)$ est un infiniment petit d'ordre un ainsi que l'angle $\alpha(x,t) = \dfrac{\partial y}{\partial x}$ que fait la corde au point d'abscisse $x$ avec l'axe $Ox$.

**1.** Établir rapidement l'équation d'onde relative aux mouvements transversaux de faible amplitude.

**2.** La masse linéique d'une corde de guitare a pour ordre de grandeur le gramme par mètre. Donner un ordre de grandeur réaliste de la tension de cette corde.

**3.** La corde de longueur $L$ est fixée à ses deux extrémités en $x = 0$ et $x = L$. Elle n'est soumise à aucune excitation aux dates positives, mais on lui donne une forme $y(x, t = 0) = Y(x)$ à la date $t = 0$ et on l'abandonne sans vitesse initiale, c'est-à-dire que $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0$.
On cherche une solution de type mode propre, c'est-à-dire de la forme $y(x,t) = f(x)\cos(\omega t)$.
Montrer que $f(x)$ est de la forme

$$f(x) = A\sin\left(\frac{\omega x}{c}\right)$$

et que les seules pulsations possibles sont de la forme $\omega_n = n\omega_1$, avec $n$ entier.
Exprimer la pulsation $\omega_1$ du mode fondamental en fonction de $L$ et $c$.

**4.** On suppose que $y(x,0) = 4b\sin^3\left(\dfrac{\pi x}{L}\right)$.
Déterminer $y(x,t)$.

On donne $\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin(3x)$.

### 3 — Corde vibrante

On applique une tension $T$ sur une corde de longueur $L$, de massique linéique $\mu$, fixée à ses extrémités $x = 0$ et $x = L$.

**1.** Établir l'équation de d'Alembert en précisant les hypothèses effectuées, et exprimer la célérité en fonction des paramètres de la corde.

**2.** Soit les solutions suivantes de l'équation précédente :

**2.a)** $y(x,t) = A\cos(\omega t - kx)$ ;

**2.b)** $y(x,t) = A\cos(\omega t + kx)$ ;

**2.c)** $y(x,t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)(C\cos kx + D\sin kx)$ ;

**2.d)** $y(x,t) = A\cos(\omega t + kx) + A\cos(\omega t - kx)$ ;

**2.e)** $y(x,t) = A\cos(\omega t + kx) + B\cos(\omega t - kx)$
avec $|A| \neq |B|$.

Interpréter physiquement chaque solution.

**3.** La corde est fixée à ses deux extrémités. Parmi les solutions proposées précédemment, quelle est celle qui convient ? En déduire les pulsations $\omega$ possibles.

**4.** On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la corde est plate (pas de perturbation) ; la solution est d'amplitude $Y$. Déterminer complètement l'expression de $y(x,t)$.

**5.** La tension exercée sur la corde est de 10 N. La corde mesure 2,0 m et, lorsque celle-ci est excitée à une fréquence de 10 Hz, on observe 5 nœuds de déplacement (en incluant les extrémités de la corde). Déterminer la masse linéique de la corde.

On rappelle la formule trigonométrique :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

## 4 — Corde lestée

On considère une corde de longueur $L$, fixée à des extrémités. En son milieu, on fixe une masse $m_0$ sur la corde. On néglige la pesanteur, et la tension de la corde est $T_0$ au repos. On note $c$ la célérité des ondes transverses.
On note $y_1(x,t)$ l'élongation de la corde pour la portion $0 \leqslant x < L/2$ et $y_2(x,t)$ son élongation pour $L/2 < x \leqslant L$.

**1.** Compte tenu de la condition imposée en $x = 0$, quelle forme proposer pour la solution $y_1(x,t)$ ? Même question pour $y_2(x,t)$ compte tenu de la condition imposée en $x = L$.

**2.** Établir deux relations vérifiées par $y_1(x,)$ et $y_2(x,t)$ ou leurs dérivées en $x = L/2$.

Nous cherchons les modes propres de la corde lestée.

**3.** Montrer qu'un premier groupe de modes propres est constitué d'un sous-ensemble des modes propres de la corde vibrante non lestée.

**4.** Montrer qu'un second groupe de modes propres est constitué des solutions de l'équation

$$\operatorname{cotan}\left(\frac{\omega L}{2c}\right) = \alpha\left(\frac{\omega L}{2c}\right),$$

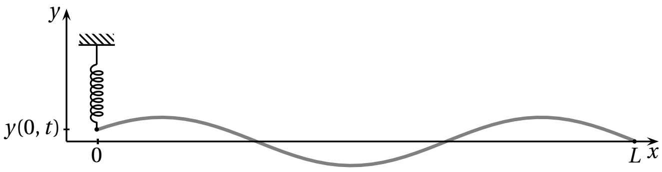
où l'on précisera l'expression de $\alpha$ en fonction de paramètres du problème.
Proposer une résolution graphique.
Étudier les cas limites $m_0 \ll m$ et $m_0 \gg m$, où $m$ est la masse de la corde.

## 5 — Corde vibrante dont l'extrémité est mobile

L'étude d'une corde vibrante dont les deux extrémités sont fixes ne permet pas de décrire rigoureusement un instrument à corde : la puissance sonore rayonnée par la corde elle-même est trop faible pour être perçue ; c'est le couplage de la corde avec la table d'harmonie de l'instrument, au niveau des extrémités de la corde, qui permet de produire une puissance sonore importante. Il faut donc tenir compte du mouvement des extrémités de la corde. Nous adopterons un modèle simplifié en considérant qu'une extrémité de la corde est mobile.
La corde est supposée homogène, de masse linéique $\mu$, soumise à une tension $T$ uniforme.

### Extrémité purement élastique

On considère que la corde est fixée en $x = 0$ à un ressort de raideur $K$, au repos quand l'extrémité de la corde est à l'élongation $y(0,t) = 0$.
On suppose que l'autre extrémité de la corde est immobile : $y(L,t) = 0$.




On rappelle que l'élongation transversale vérifie l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{avec} \quad c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

**1.** On étudie les modes propres de vibration de la corde en cherchant une solution de la forme

$$y(x,t) = Y(x)\cos(\omega t).$$

Établir l'équation différentielle vérifiée par $Y(x)$. On posera $k = \omega/c$.

**2.** À l'aide de la condition en $x = L$, exprimer $Y(x)$ en fonction de $k$, $L$ et $x$.

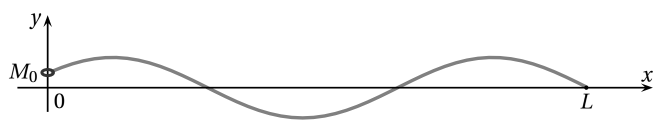
**3.** À l'aide de la condition en $x = 0$, établir une relation entre $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}$ et $y(0,t)$. En déduire une relation entre $Y'(0)$ et $Y(0)$.

**4.** En déduire que $k$ vérifie une équation, dont les solutions forment une suite discrète $k_n$. Établir de même l'équation vérifiée par les pulsations propres $\omega_n$.

**5.** Par une représentation graphique appropriée, comparer $\omega_n$ à $n\omega_1$. Quel est l'effet sur les fréquences propres de la corde de la prise en compte d'une extrémité élastique ?

### Extrémité purement massique

Une masse $M_0$ se trouve à l'extrémité $x = 0$ de la corde ; elle peut se déplacer librement le long de l'axe $Oy$. On néglige l'influence de la pesanteur sur la masse $M_0$.




Les solutions de l'équation d'onde sont cherchée de la forme $y(x,t) = Y(x)\cos(\omega t)$, où $Y(x)$ vérifie l'équation différentielle établie à la question 1.a. La condition en $x = L$, inchangée, conduit à l'expression de $Y(x)$ établie en 1.b.

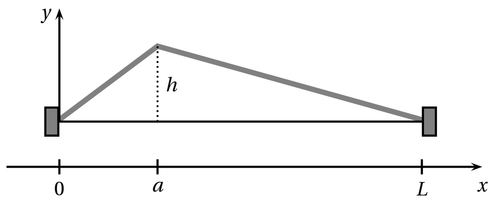
**6.** À l'aide de la condition en $x = 0$, établir une relation entre $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x=0}$ et $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(0,t)$.

**7.** En déduire que $k$ vérifie une équation, dont les solutions forment une suite discrète $k_n$. Établir de même l'équation vérifiée par les pulsations propres $\omega_n$. On ne cherchera pas à la résoudre.

**8.** Par une représentation graphique appropriée, comparer $\omega_n$ à $n\omega_1$. Quel est l'effet sur les fréquences propres de la corde de la prise en compte d'une extrémité massique ?

## 6 — Étude d'une corde pincée

On considère une corde vibrante de longueur $L$, de tension $T$, de masse linéique $\mu$, fixe à ses deux extrémités. Une corde pincée est écartée de sa position d'équilibre par un doigt (ou un plectre) ; la corde est ensuite lâchée avec une vitesse initiale nulle. Le contact avec le doigt est supposé ponctuel, à l'abscisse $a$. On adopte une description simplifiée de la forme initiale de la corde par un profil triangulaire.




**1.** Écrire les conditions initiales $y(x,0) = Y(x)$ et $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0)$.

**2.** Compte tenu des conditions aux limites $y(0,t) = 0$ et $y(L,t) = 0$, on cherche une solution de l'équation de d'Alembert sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{nc\pi t}{L} + \psi_n\right)$$

où $c$ est la célérité.

Déterminer les constantes $\psi_n$.

**3.** Considérons la fonction $F(x)$, de période $2L$, impaire, coïncidant avec $y(x,t)$ sur l'intervalle $[0,L]$ : $F(x) = y(x,t)$ pour $x \in [0,L]$.

En utilisant l'annexe, rappeler l'expression générale du développement en série de Fourier d'une fonction impaire, $2L$-périodique. Montrer que les coefficients du développement s'expriment ici en fonction du profil initial $Y(x)$ de la corde, et les calculer.

**4.** Discuter de la dépendance des amplitudes des harmoniques avec leur rang $n$.

**5.** Comment peut-on supprimer l'harmonique de rang $n$ du son émis ?

**6.** Simplifier l'expression de $y(x,t)$ quand $a \to 0$. Que peut-on dire alors du timbre du son émis lorsque le point d'excitation de la corde est proche d'une extrémité ?

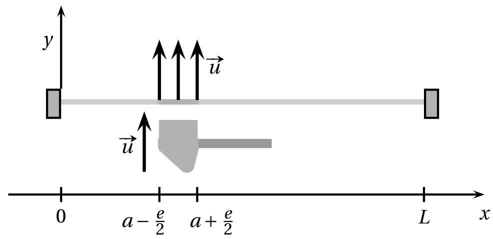
**7.** La *brillance* d'un son est décrite par le centre de gravité spectral défini par

$$CGS = \frac{\sum_{n=1}^{N} n b_n}{\sum_{n=1}^{N} b_n}$$

pour un son constitué de $N$ harmoniques. Un CGS bas correspond à un son mat, tandis qu'un son brillant est caractérisé par un CGS élevé. En considérant les 30 premiers harmoniques, comparer numériquement la brillance du son émis par une corde de guitare pour $a = \dfrac{L}{4}$ et pour $a = \dfrac{L}{20}$.

## 7 — Étude d'une corde frappée

On considère une corde vibrante de longueur $L$, de tension $T$, de masse linéique $\mu$, fixe à ses deux extrémités. Initialement, la corde est au repos dans sa situation d'équilibre. À $t = 0$, un marteau de largeur $e$ frappe la corde à l'abscisse $a$, communiquant aux points de la corde avec lesquels il est en contact au moment du choc une vitesse $u\vec{e}_y$, les autres points de la corde restant au repos.




**1.** Écrire les conditions initiales $y(x,0)$ et $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = V(x)$.

**2.** Compte tenu des conditions aux limites $y(0,t) = 0$ et $y(L,t) = 0$, on cherche une solution de l'équation de d'Alembert sous la forme :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{nc\pi t}{L} + \psi_n\right)$$

où $c$ est la célérité.

Déterminer les constantes $\psi_n$.

**3.** On suppose que $e \ll L$.

Considérons la fonction $V(x)$, de période $2L$, impaire, coïncidant avec $\dfrac{\partial y}{\partial t}(x,t)$ sur l'intervalle $[0,L]$ :

$$F(x) = \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) \quad \text{pour } x \in [0,L].$$

En utilisant l'annexe, rappeler l'expression générale du développement en série de Fourier d'une fonction impaire, $2L$-périodique. Montrer que les coefficients du développement s'expriment ici en fonction du profil initial de vitesse $V(x)$ de la corde, et les calculer.

**4.** Montrer que l'on peut supprimer des harmoniques en choisissant judicieusement un paramètre. Comment supprimer l'harmonique de rang $n = 7$, dissonant ?

## Annexe : décomposition en série de Fourier

Soit $u(t)$ un signal de période $T$. On peut écrire $u(t)$ comme la somme d'une série trigonométrique :

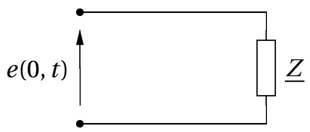
$$u(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t \\ b_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$$

où $t_0$ est quelconque (on prend usuellement $t_0 = 0$ ou $t_0 = -T/2$ si $u(t)$ présente une parité).

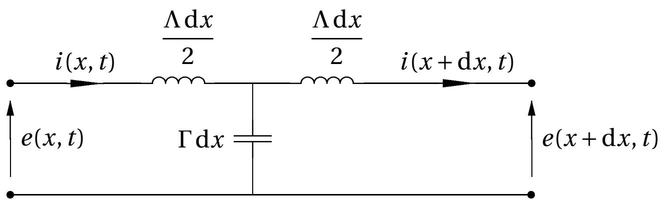
# Autour des lignes électriques

## 8 — Ligne électrique

Si le courant qui parcourt un circuit électrique a une fréquence trop élevée, on ne peut plus dire qu'il est égal en tout point. On se propose d'étudier un tel cas.
Soient deux fils conducteurs parallèles de longueur $L$, la ligne ayant une inductance linéique $\Lambda$ et une capacité linéique $\Gamma$. On relie les deux fils en $x = L$ par un dipôle d'impédance $\underline{Z}$.
En $x = 0$, on impose une tension $e(0,t) = E_0 \cos(\omega t)$.




On donne le schéma équivalent d'une portion de ligne de longueur $\mathrm{d}x$.




**1.** Montrer que pour tout $x$ :

$$\frac{\partial e}{\partial x} + \Lambda\frac{\partial i}{\partial t} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{\Gamma}\frac{\partial i}{\partial x} = 0\,.$$

**2.** Montrer que

$$\underline{e}(x,t) = \alpha\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega(t-x/v)]} + \beta\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}[\omega(t+x/v)]}$$

est solution. Expliciter $v$.
Expliquer physiquement ces deux termes.
Exprimer $\alpha$ et $\beta$ en utilisant les conditions limites :

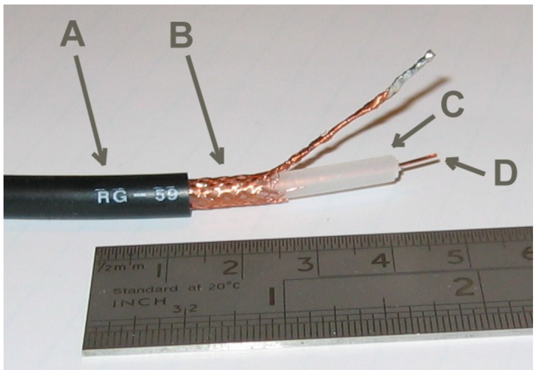
$$\underline{e}(0,t) = E_0\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{e}(L,t) = \underline{Z}\,\underline{i}(L,t)\,.$$

On pourra utiliser le fait que, en tout point du circuit, le courant moyen est nul.

**3.** Déterminer $\underline{Z}$ tel qu'il n'existe qu'une onde se déplaçant de $x = 0$ à $x = L$.

## 9 — Câble coaxial

Les câbles coaxiaux sont utilisés pour transmettre des informations. Ils sont conçus pour transmettre des signaux sans trop d'atténuation et pour assurer une protection contre les perturbations extérieures. On les utilise notamment pour les câbles d'antenne de télévision, pour transmettre des signaux audio-numériques, ainsi que pour des interconnexions dans les réseaux informatiques ; toutefois, la fibre optique est préférée pour des transmissions sur des distances supérieures au kilomètre, son atténuation étant bien inférieure à celle du câble coaxial.



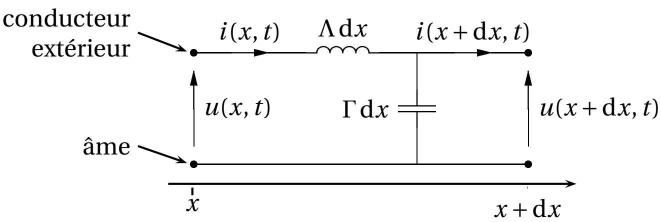

Les câbles coaxiaux sont utilisés pour transmettre des informations. Ils sont conçus pour transmettre des signaux sans trop d'atténuation et pour assurer une protection contre les perturbations extérieures. On les utilise notamment pour les câbles d'antenne de télévision, pour transmettre des signaux audio-numériques, ainsi que pour des interconnexions dans les réseaux informatiques ; toutefois, la fibre optique est préférée pour des transmissions sur des distances supérieures au kilomètre, son atténuation étant bien inférieure à celle du câble coaxial.

Un câble coaxial est formé de deux très bons conducteurs, de même longueur $L$, l'un entourant l'autre :

— le conducteur central (D), appelé *âme*, est en général massif (en cuivre) ;

— le conducteur extérieur (B) est un blindage constitué d'une tresse métallique, parfois enroulée sur une feuille d'aluminium.

Les deux conducteurs sont séparés par un isolant (C), le plus souvent en téflon ou en polyéthylène. L'ensemble est entouré d'une gaine isolante (A), en PVC, polyéthylène, téflon ou caoutchouc synthétique.
Un tel câble, de par sa constitution, possède une inductance $L_\mathrm{c}$ et une capacité $C_\mathrm{c}$.
Pour un câble de longueur $L = 100$ m, on mesure $L_\mathrm{c} = 33{,}4$ µH et $C_\mathrm{c} = 7{,}46$ nF.
On modélise le câble comme un milieu continu, caractérisé par une inductance linéique $\Lambda$ (en $\mathrm{H\cdot m^{-1}}$) et une capacité linéique $\Gamma$ (en $\mathrm{C\cdot m^{-1}}$) : on parle de modèle à constantes réparties.
Le schéma électrique modélisant une longueur élémentaire $\mathrm{d}x$ du câble est :




**1.** En écrivant la loi des nœuds et la loi des mailles, puis en les linéarisant, établir deux équations aux dérivées partielles vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$.

**2.** Montrer que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ vérifient la même équation de d'Alembert, faisant intervenir une célérité $c$ que l'on exprimera en fonction des caractéristiques de la ligne. Calculer numériquement $c$ en utilisant les valeurs mesurées de l'inductance et de la capacité du câble.

On considère une onde progressive de tension dans le sens des $x$ croissants : $u(x,t) = f\left(t - \dfrac{x}{c}\right)$.

**3.** Établir l'expression de l'onde de courant $i(x,t)$.

Montrer que l'on peut définir une impédance caractéristique $Z_\mathrm{c} = \dfrac{u(x,t)}{i(x,t)}$ indépendante de la position $x$ et du temps $t$, dont on donnera l'expression en fonction de $\Lambda$ et $\Gamma$.

Que devient cette impédance dans le cas d'une onde progressive dans le sens des $x$ décroissants ?

**4.** Déterminer numériquement les valeurs de $\Lambda$, $\Gamma$ et $Z_\mathrm{c}$ pour le câble considéré.

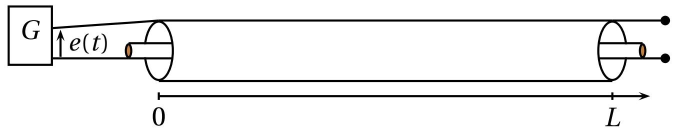
On se place dans le cas général où l'onde de tension n'est *a priori* pas progressive ; elle s'écrit alors sous la forme

$$u(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

**5.** Quelle est alors l'expression du courant $i(x,t)$ le long du câble ?

**6.** A-t-on toujours proportionnalité entre $u(x,t)$ et $i(x,t)$ ?

La ligne est de longueur $L = 100$ m, et un générateur envoie un signal $e(t)$ en $x = 0$.
L'extrémité de la ligne est en circuit ouvert.




On considère une onde de tension issue de générateur, qualifiée de « incidente », progressive dans le sens des $x$ croissants :

$$u_\mathrm{i}(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

**7.** Quelle est l'expression de l'onde de courant associée $i_\mathrm{i}(x,t)$ ? On l'exprimera en fonction de $f(t - x/c)$ et de l'impédance caractéristique $Z_\mathrm{c}$ de la ligne.

**8.** Dans le cas où la ligne est en sortie ouverte, traduire cette condition en une relation imposée à une des grandeurs $u(L,t)$ ou $i(L,t)$.
L'onde décrite par $u_\mathrm{i}(x,t)$ et $i_\mathrm{i}(x,t)$ peut-elle convenir ?
En déduire qu'il doit exister une onde progressive dans le sens des $x$ décroissants, appelée onde réfléchie, décrite par

$$u_\mathrm{r}(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

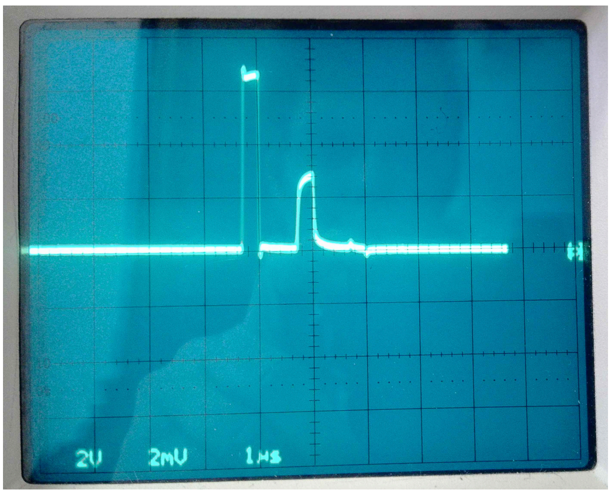
Quelle est l'expression de l'onde de courant associée $i_\mathrm{r}(x,t)$ ?

**9.** On définit les coefficients

$$r_I = \frac{i_\mathrm{r}(L,t)}{i_\mathrm{i}(L,t)} \quad \text{et} \quad r_V = \frac{u_\mathrm{r}(L,t)}{u_\mathrm{i}(L,t)}.$$

Quelle est leur interprétation physique ?
Donner leurs expressions dans le cas où l'extrémité de la ligne est ouverte.

On place un oscilloscope à l'entrée du câble, en $x = 0$. Le générateur envoie une impulsion rectangulaire. On donne le signal visualisé à l'oscilloscope, la base de temps étant de 1 µV/div :



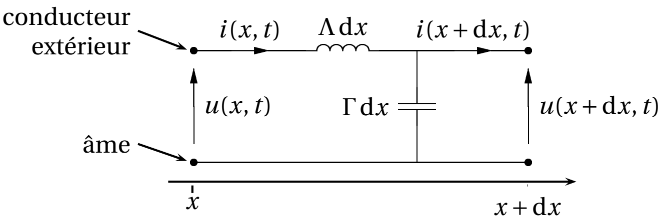
**10.** Interpréter le signal observé. Déterminer la célérité de l'onde dans le câble et comparer avec la valeur déterminée à la question **2**.

**11.** Quelle serait l'allure de l'oscillogramme si on change la nature de l'extrémité terminale (ouverte $\rightleftarrows$ fermée) ?

**12.** Le modèle du câble coaxial proposé ici est-il satisfaisant pour expliquer l'allure de l'oscillogramme ?

## 10 — Câble coaxial et impédance itérative

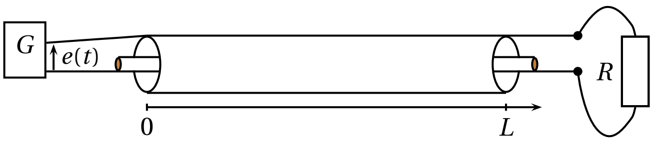
On considère un câble coaxial modélisé comme un milieu continu, caractérisé par une inductance linéique $\Lambda$ (en $\mathrm{H \cdot m^{-1}}$) et une capacité linéique $\Gamma$ (en C · m−1) : on parle de modèle à constantes réparties.
Le schéma électrique modélisant une longueur élémentaire $\mathrm{d}x$ du câble est :




**1.** En écrivant la loi des nœuds et la loi des mailles, puis en les linéarisant, établir deux équations aux dérivées partielles vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$.

**2.** Montrer que $u(x,t)$ et $i(x,t)$ vérifient la même équation de d'Alembert, faisant intervenir une célérité $c$ que l'on exprimera en fonction des caractéristiques de la ligne.

La ligne est de longueur $L = 100$ m, et un générateur envoie un signal $e(t)$ en $x = 0$.
On branche une impédance résistive $R$ à l'extrémité $x = L$ de la ligne.




On considère une onde de tension sous la forme

$$u(x,t) = u_\mathrm{i}(x,t) + u_\mathrm{r}(x,t)$$

avec

$$u_\mathrm{i}(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) \quad \text{et} \quad u_\mathrm{r}(x,t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

**3.** Quelle interprétation physique donner aux termes $u_\mathrm{i}(x,t)$ et $u_\mathrm{r}(x,t)$ ?

**4.** En déduire l'expression de l'onde de courant associée, écrite sous la forme

$$i(x,t) = i_\mathrm{i}(x,t) + i_\mathrm{r}(x,t)$$

en explicitant les expressions de $i_\mathrm{i}(x,t)$ et $i_\mathrm{r}(x,t)$.
On posera $Z_\mathrm{c} = \sqrt{\dfrac{\Gamma}{\Lambda}}$.

**5.** On définit les coefficients

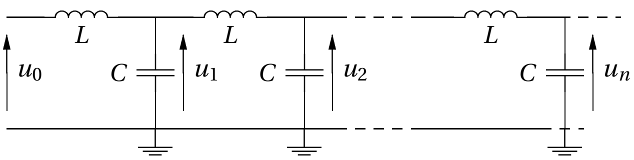
$$r_I = \frac{i_\mathrm{r}(L,t)}{i_\mathrm{i}(L,t)} \quad \text{et} \quad r_V = \frac{u_\mathrm{r}(L,t)}{u_\mathrm{i}(L,t)}.$$

À partir de la condition imposée en $x = L$ par la présence de la résistance, déterminer les expressions de $r_I$ et $r_V$ en fonction de $R$ et $Z_\mathrm{c}$.

**6.** Comment supprimer l'onde réfléchie à l'extrémité d'un câble coaxial ?

## 11 — Ligne *LC* discrète dans l'approximation continue

On considère une ligne $LC$ supposée de taille infinie dans un premier temps, constituée d'inductances discrètes supposées idéales $L = 10\ \mu$H et de capacités discrètes $C = 4$ nF. On applique une tension $u_0$ à l'entrée de la ligne et on étudie la propagation de l'onde de tension $u_n(t)$ et de courant $i_n(t)$ le long de la ligne.




**1.** Déterminer l'équation différentielle couplant les tensions $u_n(t)$, $u_{n+1}(t)$ et $u_{n-1}(t)$. On fera apparaître une pulsation une pulsation $\omega_0$ que l'on exprimera en fonction de $L$ et $C$. Calculer la valeur numérique de la fréquence $f_0$ correspondante.

L'approximation continue consiste à ne considérer que les variations spatiales des tensions $u_n$ ne se font que su de « grandes distances ». On suppose ainsi que la distance caractéristique sur laquelle varie $u_n(t)$ est très supérieure à la taille $a$ d'une cellule. On peut alors introduire la fonction continue des deux variables continues $x$ et $t$, définie par $u(x = na, t) = u_n(t)$.

**2.** Dans le cadre de cette approximation, montrer que la fonction $u(x,t)$ est régie par une équation de d'Alembert. Exprimer la vitesse de propagation $v$ des ondes de tension et de courant en fonction de $\omega_0$ et $a$.

On applique une tension sinusoïdale $u_0(t) = U\cos(\omega t)$ à l'entrée de la ligne, et on se place en régime sinusoïdal forcé. On considère une solution en onde progressive harmonique de la forme

$$\underline{u}(x,t) = \underline{U}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)} \quad \text{et} \quad \underline{i}(x,t) = \underline{I}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t - kx)}$$

pour l'onde de tension et l'onde de courant se propageant le long de la ligne.

**3.** Montrer que les deux ondes de tension $\underline{u}(x,t)$ et de courant $\underline{i}(x,t)$ sont liées par la relation

$$\frac{\underline{u}(x,t)}{\underline{i}(x,t)} = \underline{Z}$$

où l'on exprimera la grandeur $\underline{Z}$ en fonction de $L$ et $C$. Quelle est sa dimension ? Quelle est sa valeur numérique ? Commenter.

Qu'en serait-il si on avait considéré deux ondes de tension et de courant progressives vers les $x$ décroissants ?

La ligne est en réalité de taille finie et est constituée de 16 cellules $LC$. On s'intéresse ici à la propagation d'un train d'impulsions périodiques de tension le long de la ligne.

**4.** Par analyse dimensionnelle, donner un ordre de grandeur du temps de retard $\tau$ provoqué par la traversée d'une cellule $LC$. Quel ordre de grandeur prévoyez-vous *a priori* pour le temps de propagation du signal entre l'entrée et la sortie de la ligne ?

En déduire une condition sur la fréquence pour que les impulsions ne se recouvrent pas.

**5.** On applique à l'entrée de la ligne (signal $u_0$) un train d'impulsions adéquat et d'amplitude suffisante à l'aide de GBF (résistance interne 50 Ω). On observe simultanément les signaux $u_0$ et $u_{16}$ à l'oscilloscope dans les deux cas suivants :

— extrémité en circuit ouvert ;

— extrémité en court-circuit.

Représenter l'allure des signaux $u_0$ et $u_{16}$.

**6.** On branche maintenant une résistance variable $R$ à l'extrémité de la ligne, et on en ajuste la valeur pour éliminer le signal réfléchi observé à l'entrée. Quelle est cette valeur ? Interpréter.

# L'équation de d'Alembert dans d'autres situations

## 12 — Chaîne d'atomes

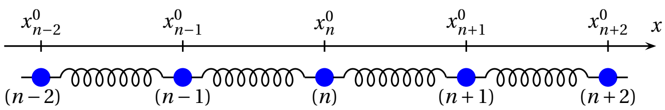
On modélise une tige solide par une chaîne infinie d'oscillateurs, selon un axe $Ox$, constituée de masses $m$ identiques, reliées deux à deux par un ressort de raideur $k$ et de longueur au repos $a$. Les masses, qui modélisent les atomes d'un cristal, se déplacent sans frottement le long de l'axe $Ox$. Au repos, elles sont distantes de $a$.

On a donc une description discrète du milieu :

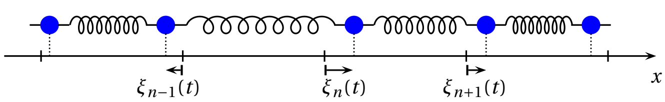
— la masse numéro $n$ a pour abscisse $x_n^0 = na$ quand elle est au repos ;

— elle a pour abscisse $x_n(t) = x_n^0 + \xi_n(t) = na + \xi_n(t)$ en présence de l'onde.

La grandeur algébrique $\xi_n(t)$ repère donc l'écart de la masse numéro $n$ par rapport à sa position d'équilibre. Sur la figure suivante, on a par exemple $\xi_{n-1}(t) < 0$, $\xi_n(t) > 0$ et $\xi_{n+1}(t) < 0$.



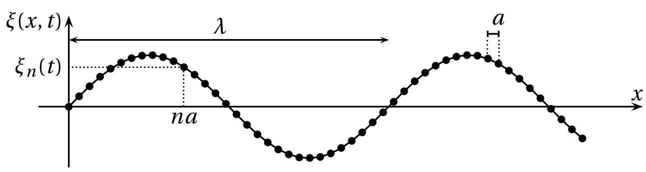

Système à l'équilibre




Système hors équilibre

**1.** En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la masse $(n)$, établir une relation de récurrence reliant $\dfrac{d^2\xi_n}{dt^2}$ à $\xi_{n-1}(t)$, $\xi_n(t)$ et $\xi_{n+1}(t)$.

Nous allons mener l'étude dans le cadre de l'*approximation des milieux continus*, valable quand la distance entre chaque masse est très petite devant la longueur d'onde de l'onde considérée : $a \ll \lambda$. À l'échelle de la longueur d'onde $\lambda$, la chaîne est vue comme un milieu continu, comme le suggère la figure suivante.




Dans le cadre de cette approximation, nous pouvons remplacer la description discrète $\{\xi_n(t)\}_n$ de l'état de la chaîne d'oscillateurs par une fonction continu de l'espace et du temps $\xi(n,t)$, qui interpole la position des masses. Cette fonction $\xi(x,t)$, qui décrit de façon continue l'écart des masses à leur position d'équilibre, doit satisfaire aux propriétés suivantes :

— elle est de classe $\mathscr{C}^2$ ;

— elle coïncide avec l'écart à l'équilibre de la masse $(n)$ quand $x = na$, soit $\xi(na,t) = \xi_n(t)$.

**2.** La distance $a$ étant considérée comme un « infiniment petit », en effectuant un développement de Taylor[1] à l'ordre 2 de $\xi_{n+1}(t)$ et $\xi_{n-1}(t)$, montrer que la relation de récurrence établir précédent conduit à

1. On remarquera que $\xi_{n+1}(t) = \xi(x_n^0 + a, t) = \xi(x_n^0, t)$.

l'équation de d'Alembert

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

où la célérité $c$ sera exprimée en fonction de $k$, $a$ et $m$.

## 13 — Onde sur une barre

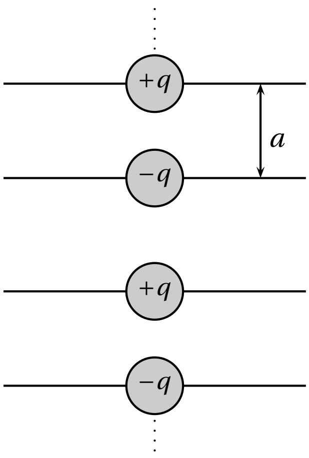
Une barre de masse volumique $\rho$, de section $S$ et de module d'Young $E$ est le siège d'une onde de déformation longitudinale entraînant le déplacement de la section située à l'abscisse $x$ d'une longueur $u(x,t)$. La force de traction entraînant un allongement $\mathrm{d}l$ de la barre est donnée par

$$\mathrm{d}F = ES\frac{\mathrm{d}l}{l}.$$

En étudiant la section de barre située entre $x$ et $x+\mathrm{d}x$, trouver l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ et donner la nature des solutions, ainsi que la vitesse de propagation de l'onde.

## 14 — Boules chargées —oral ENS…

On considère une chaîne infinie de boules chargées qui ne peuvent se déplacer que sur les fils horizontaux.




Donner l'équation d'onde :

— si chaque boule n'interagit qu'avec ses deux plus proches voisines ;

— si chaque boule interagit avec toutes les autres (une infinité).

## 15 — Ondes de gravité en eau peu profonde

On considère un bassin de largeur $L$ selon $Oy$, de profondeur moyenne $H$ selon $Oz$ et de longueur infinie selon $Ox$, rempli d'eau. Le bassin est le siège de vagues (ondes de gravité) caractérisées par un champ de vitesse $\vec{v} = v(x,t)\vec{e}_x$ et un champ de pression $P(x,z,t)$. À l'instant $t$ et à l'abscisse $x$, la hauteur d'eau est notée

$$h(x,t) = H + \zeta(x,t) \quad \text{où} \quad |\zeta(x,t)| \ll H.$$

On considère $\vec{v}$ comme un infiniment petit et on mènera les calculs au premier ordre.

**1.** On admet la relation

$$\mu\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \approx -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P + \mu\vec{g}.$$

Interpréter et commenter cette relation.

**2.** En déduire les relations (PZ) liant $P(x,z,t)$ et $\zeta(x,t)$, et (PV) liant $P(x,z,t)$ et $v(x,t)$.

**3.** En déduire l'équation de couplage (1) liant $\dfrac{\partial v}{\partial t}$ et $\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}$.

On considère une tranche d'eau située entre les abscisses $x$ et $x+\mathrm{d}x$, en régime non permanent.

**4.** En effectuant un bilan de masse sur cette tranche en régime non stationnaire, obtenir la relation (2) couplant $\dfrac{\partial v}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial \zeta}{\partial t}$.

**5.** En déduire que la surélévation $\zeta(x,t)$ est régie par une équation de d'Alembert, et préciser l'expression de la vitesse de propagation des vagues.

**6.** Expliquer pourquoi les vagues ralentissent en s'approchant du rivage, et y arrivent en lui étant parallèles.

**7.** Expliquer pourquoi une grosse vague se propageant dans un bassin de profondeur constante se déforme et déferle.